

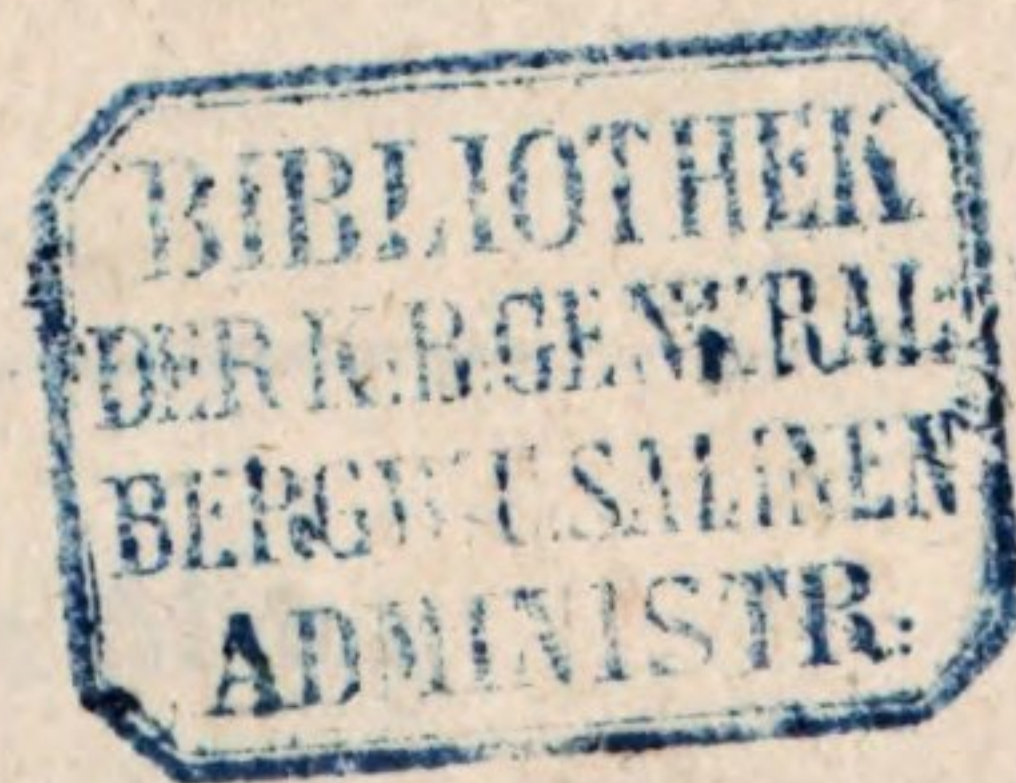


BHS II K 11



A l l g e m e i n e

Größenlehre.



Größtentheile



G r u n d s ä t z e

der

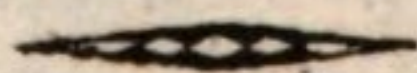
a l l g e m e i n e n

G r ö ß e n l e h r e

von

J. J. G o e b e l,

öffentlichen ordentlichen Professor der Mathematik an der Königlich Niederländischen
hohen Schule zu Löwen.



Frankfurt am Main,

in der Andreäischen Buchhandlung.

1 8 2 7.

Grundriss

der

allgemeinen

Größenlehre

von

J. J. Göbel

Lehrer an der Königl. Hochschule zu Bonn
Bonn 1871

Bayerische
Staatsbibliothek
München

V o r r e d e.

Meine Absicht bei Herausgabe des vorliegenden Lehrbuchs der *allgemeinen Gröſsenlehre* war keine andere, als dem Lehrer beim Vortrage und dem Schüler beim Studium der Anfangsgründe der mathematischen Wissenschaften einen Leitfaden an die Hand zu geben. Ich habe deſſhalb auch alles dasjenige darin aufgenommen, was in Verbindung mit meinen *Grundlehren der Geometrie, Trigonometrie, und der darstellenden Geometrie* ¹⁾ einen vollständigen Lehrkursus der Elemente der Mathematik, wie sie auf höheren Bildungsanstalten gelehrt werden können, zu bilden schien. Die Einrichtung in beiden Lehrbüchern ist so getroffen, daß die Schüler dieselben in einem Zeitraume von drei bis vier Jahren bequem durcharbeiten, und daraus so viele Kenntnisse in der Mathematik sich sammeln können, als bei einem allgemeinen Studienplane nur immer verlangt werden mögen.

1) Frankfurt a. M. in der Andreäischen Buchhandlung. 1826.

Ich wünsche, das dieses Buch von dem Gesichtspunkte aus betrachtet werde, dafs es nämlich nur eine Hilfsleistung für den Lehrer und Schüler sei; in den Händen eines wackern Lehrers wird es dann den Nutzen beim öffentlichen Unterrichte leisten, den ich bezweckte; der fleifsige Schüler wird um so sicherer und nützlicher dem Vortrage seines Lehrers folgen können, da er für jede allgemeine Wahrheit immer eine hinreichende Erläuterung finden wird.

Habe ich nun durch mein Bestreben zur Beförderung des Studiums der Mathematik etwas beigetragen, so ist mein Zweck vollkommen erreicht, und ich fühle mich dadurch glücklich; mir ist dann der süfseste Lohn geworden, die Ueberzeugung nämlich, etwas Nützliches unternommen zu haben.

Löwen, im Juni 1827.

Der Verfasser.

Reine Mathematik.

Die allgemeine Gröfsenlehre.

Erstes Kapitel.

Grundbegriffe.

§. 1.

Mathematik wird jene Wissenschaft genannt, welche die Regeln und Grundsätze aufstellt, nach welchen *Gröfsen* gebildet, und unter sich verglichen werden.

Unter dem Worte Gröfse (*quantitas*) überhaupt versteht man die Vorstellung der Verbindung eines Manchfaltigen. Da ein jedes Manchfaltige einer Vermehrung oder Verminderung fähig ist, so läßt sich allerdings unter dem Begriffe einer Gröfse dasjenige denken, was vermehrt oder vermindert werden kann; der Gegenstand selbst heifst alsdann ein *Großes* (*quantum*).

§. 2.

So lange bei der Bildung und Vergleichung der Gröfsen auf wirkliche Gegenstände, oder Erscheinungen der Natur keine Rücksicht genommen wird, so

heißt die Wissenschaft *reine Mathematik*; sie wird aber *angewandte Mathematik* genannt, sobald die rein mathematischen Grundsätze auf wirkliche Gegenstände, die einer GröÙe fähig sind, angewandt werden. Hieher gehören die *mechanischen, optischen* und *astronomischen* Wissenschaften.

§. 3.

Ist eine GröÙe so beschaffen, daß jeder ihrer Theile für sich eine GröÙe bildet, oder deren Theile als unveränderlich für sich bestehend gegeben sind, wie eine Summe Geldes, eine Menge Menschen; so heißt sie eine *diskrete* GröÙe. Sind hingegen die Theile einer GröÙe so unter sich zusammenhängend, daß die Gränze des einen auch zugleich die Gränze des unmittelbar folgenden bildet, so wird sie eine *stetige* GröÙe (*continuirliche*) genannt. Die Gränzen einer solchen GröÙe können von uns nach Willkühr bestimmt werden.

Die reine Mathematik zerfällt, zufolge dieses Unterschieds der GröÙen, in die Lehre von den diskreten GröÙen, welche *allgemeine GröÙenlehre* heißt; und in die Lehre von den stetigen GröÙen, *Geometrie*, oder *allgemeine RaumgröÙenlehre*.

§. 4.

Beide Arten von GröÙen behalten entweder bei ihrer Verbindung oder Vergleichung eine unveränderliche Menge von Theilen bei, welche auch in Hinsicht ihrer GröÙe unverändert bleiben, d. h. sie behalten dieselben Werthe bei; oder der Zustand der GröÙe verändert sich jeden Augenblick, oder läßt sich wenigstens veränderlich denken: jene heißen *beständige* — *constante* —, diese *veränderliche* GröÙen.

Derjenige Theil der allgemeinen GröÙenlehre, in welchem blos beständige GröÙen Gegenstände der Untersuchungen ausmachen, umfaßt die *Arithmetik* oder *Zahlenlehre*, und *Algebra*; jene enthält die ein-

fachen ursprünglichen Verknüpfungsarten der Gröſſen, und die Regeln, wie diese gebildet werden; diese aber lehrt, mittelst gegebener Bedingungen den Werth noch unbekannter Gröſſen zu bestimmen.

Derjenige Theil der allgemeinen Gröſſenlehre, worin nebst constanten auch veränderliche Gröſſen den Untersuchungen zum Grunde gelegt werden, heisst *Analysis*, wovon die *Differenzial-* und *Integralrechnung* einen Theil ausmacht.

Auch die Geometrie lässt sich füglich in zwei Abtheilungen bringen, wovon die eine ausschliesslich mit denjenigen Raumgröſſen sich beschäftigt, zu deren Betrachtungen die gerade Linie, der Kreis, und die von diesen begrenzten Figuren hinreichend sind; hieher lässt sich noch die *Trigonometrie* rechnen.

Der andere Theil der Geometrie handelt von jenen Raumgröſſen, welche durch andere krumme Linien begrenzt werden. Hieher gehört die *analytische Geometrie*.

§. 5.

Da eine jede Gröſſe als eine Vielheit von Theilen betrachtet werden kann, so lassen sich diese Theile auch so denken, daſs zwischen ihnen weder der Form noch der Gröſſe nach ein Unterschied Statt findet; Gröſſen in diesem Zustande werden *gleich* genannt, welche Beschaffenheit durch das zwischen solche Gröſſen gesetzte Zeichen ($=$, *gleich*) angezeigt wird. Ungleiche Gröſſen werden durch die Zeichen $>$, oder $<$ voneinander getrennt; die Gröſſe, welche an der Spitze dieses Zeichens steht, ist immer die *kleinere*, die andere die *gröſsere* *).

*) Hier lassen sich nun leicht die Axiomen erklären:

1) Jede Gröſſe ist sich selbst gleich.

2) Wenn zwei Gröſſen derselben dritten gleich sind, so sind auch die beiden wechselseitig gleich.

3) Wenn man gleiche Gröſſen um gleichviel vermehrt oder vermindert, so sind die hiedurch erzeugten Gröſſen auch unter sich gleich.

Bei der Annahme, daß nämlich eine Gröfse aus gleichen Theilen bestehen kann, läßt sich durch Wiederholung *eines* solchen Theils die Gröfse selbst erzeugen. Werden nun wirklich durch Wiederholung eines solchen Theils, oder auch einer schon gebildeten Gröfse, andere gebildet, so entsteht ein *System von Gröfsen — Zahlen —*, dessen Grundlage die *Einheit* genannt wird; bleibt ihre Natur unbestimmt, so ist sie die *absolute* Einheit; wird aber ihre Beschaffenheit näher angegeben, so heißt sie *relative* Einheit.

Die Gröfsen, welche durch wiederholte Verbindung derselben Einheit erzeugt werden, sind *ähnlich — homogen —*; im Gegentheile sind sie *unähnlich — heterogen —*.

§. 6.

Wird aber das Verhältniß eines oder mehrerer gleichartigen Theile zur ganzen Gröfse angegeben, so werden die Ausdrücke solcher Verhältnisse *Brüche* genannt, zu deren Darstellung zwei Zeichen erforderlich sind: durch das eine wird die Menge gleicher Theile angegeben, in welche die ganze Gröfse zerlegt werden soll, und heißt deshalb des Bruches *Nenner*; das andere Zeichen dient die Menge der, von der so eingetheilten Gröfse genommenen, gleichen Theile auszudrücken, und heißt *Zähler* des Bruchs, welcher durch einen horizontalen Strich so vom Nenner getrennt wird, daß jener oberhalb, dieser unterhalb des Strichs zu stehen kömmt.

§. 7.

Soll nun das Resultat des Aktes unsers Verstandes, d. i. die Vorstellung der Verbindung eines Manchfaltigen, d. h. die Gröfse, dargestellt werden, so geschieht dieß durch willkührlich angenommene Zeichen; die bequemsten sind die Zahlzeichen unsers Zahlensystems, und die Buchstaben verschiedener Alphabete; diejenigen Gröfsen, welche durch Buchstaben dargestellt werden, heißen auch oft *allgemeine* Gröfsen.

Sollen aber die Bildungsarten der Gröfsen angezeigt werden, so bedient man sich der Zeichen $+$ (plus), $-$ (minus), $\times$ oder $.$ (multiplicirt), und $:$ (dividirt, hiezu gehört noch der Querstrich $-$).

Sind bei der Verknüpfungsart der Gröfsen, welche durch $+$ und $-$ angezeigt wird, die innern Merkmale der zu verknüpfenden Gröfsen von der Art, dafs sie alle nebeneinandergesetzt ein Ganzes erzeugen, welches der Inbegriff aller in den verschiedenen Vereinigungsgröfsen enthaltenen Einheiten ist; so pflegt man einem jeden solchen Theile entweder das Zeichen $+$, oder einem jeden das Zeichen $-$ vorzusetzen.

Diesem Nebeneinandersetzen gleichartiger Theile liegt zugleich die Idee des Entgegensetzens solcher gleichartigen Theile zum Grunde. Diese wechselseitige Beziehung wird dann durch Verbindung beider Zeichen $+$ und $-$ dargestellt, wovon das eine das Nebeneinanderbestehen gleichartiger Theile, das andere hingegen das Entgegensetzen solcher Theile ausdrückt. Diese Verhältnissbegriffe führen zu einer neuen Benennung der Gröfsen, vermöge welcher sie entweder *positive*, oder *negative* Gröfsen heifsen; diesen pflegt man das Zeichen $-$, jenen das Zeichen $+$ vorzusetzen, welches letztere jedoch gewöhnlich im Anfange weggelassen wird.

§. 8.

Damit die Untersuchungen der allgemeinen Gröfsenlehre mit Leichtigkeit und Bequemlichkeit angestellt werden können, wird eine bestimmte Anzahl von Einheiten, also eine bestimmte Gröfse — *Grundgröfse* — gedacht, durch deren Bezeichnung die Darstellung der aus ihr erzeugten Gröfsen — *Glieder* — vereinfacht wird. Der Inbegriff der aus der Grundgröfse nach einem gegebenen Gesetze gebildeten Glieder heifst eine *Zahlenreihe*. Hieraus erhellet, dafs es sovieler Zahlenreihen, als Grundgröfsen denkbar sind, geben kann. Unter allen Zahlenreihen ist aber das

dekadische System, dessen Grundzahl 10 ist, für die ganze allgemeine Größenlehre das wichtigste; es wird durch allmähliges Zusammenfassen der absoluten Einheit gebildet.

Jedes Zahlensystem läßt sich zur leichtern Uebersicht verschiedenartig abtheilen, und unterabtheilen; die Hauptabtheilungen heißen *Perioden*; die Unterabtheilungen einer Periode *Ordnungen*, wovon eine jede einen bestimmten *Rang* einnimmt. So hat man die Ordnung der einfachen in der GrundgröÙe enthaltenen Einheiten; die verschiedenen Ordnungen einer jeden Periode; u. s. w.

Ist der Rang einer Ordnung so hoch, als die GrundgröÙe selbst, so ist die erste Periode mit der gleichhohen Ordnung geschlossen, und eine zweite Periode fängt an. Werden nun die Unterabtheilungen so lange wiederholt, bis die Rangordnungszahl selbst wieder der GrundgröÙe gleich geworden ist, so fängt damit eine neue Periode an, in welcher durch Wiederholung aller vorhergehenden Abtheilungen und Unterabtheilungen endlich eine Rangordnungszahl erhalten wird, die abermals der GrundgröÙe gleich ist. Ein gleiches Bildungsgesetz gilt für die folgenden Perioden.

§. 9.

Diejenigen Zahlen, wodurch die verschiedenen Unterabtheilungen einer jeden Periode angezeigt werden, heißen *Coëfficienten*, *Ordnungs-* oder *Rangordnungszahlen*. Ist z. B. a die GrundgröÙe eines Systems, so werden $2a$, $3a$, $4a$, . . . die verschiedenen Rangordnungen der Einheiten der GrundgröÙe sein; die Zahlen 2, 3, 4, . . . sind die Coëfficienten (§. 13).

Die ersten Glieder der verschiedenen Perioden eines Zahlensystems, wie a , aa , aaa , . . . werden *Potenzen* der GrundgröÙe, und vorzugsweise aa ihr *Quadrat*, aaa ihr *Cubus* genannt; in Beziehung auf die Potenzen nimmt die GrundgröÙe den Namen *Wurzel* an. — Um aber die Potenzen einer oder mehrerer

Grundgrößen leichter auffassen, und bequemer darstellen zu können, pflegt man blos die Grundgröße, und oben zur rechten Seite diejenige Zahl zu schreiben, welche die wievielte Periode anzeigt; diese Zahl heißt *Exponent* — *Potenzenzeiger*, *Potenzenzahl*. Nach dieser Erklärung schreibt man a^2 für aa ; a^3 für aaa ; ... 10^2 für 10×10 ; 10^3 für $10 \times 10 \times 10$; ... wo die Zahlen 2, 3, ... die Exponenten der Grundgrößen sind.

§. 10.

Aus den bisher gegebenen Erklärungen über Coëfficienten und Exponenten lassen sich leicht nachstehende Folgerungen ableiten, nämlich:

1. Jeder Größe kann das Zeichen 1 der absoluten Einheit als Coëfficient vorgesetzt werden.

2. Jede Grundgröße, und die verschiedenen Ordnungen der ersten Periode eines jeden Zahlensystems haben 1 zum Exponenten. Z. B. a ist soviel als a^1 ; $3a$ soviel als $3a^1$; ...

3. Hat eine Größe zum Exponenten Null, so wird dadurch angezeigt, dass die Grundgröße fehlt. Da nun, nach 1, eine jede Größe zum Coëfficienten die absolute Einheit hat; so ist $a^0 = 1a^0 = 1$; $3a^0 = 3$; ... Es werden also durch a^0 und die Ordnungszahlen 1, 2, 3, ... die in der Grundgröße a enthaltenen absoluten Einheiten dargestellt.

Zweites Kapitel.

Die verschiedenen Verknüpfungsarten ganzer Gröſſen.

§. 11.

A. Die Addition — das Zusammenzählen —.

Unter *Addition* versteht man die Vereinigung gleichartiger Zahlen in eine einzige, welche der Inbegriff sovieler Einheiten ist, als die gegebenen Gröſſen zusammengenommen enthalten; die gefundene Zahl heißt *Summe* — *Aggregat* —.

Dieses Geschäft wird dadurch angedeutet, indem man den in eine Summe zu vereinigenden Gröſſen das Zeichen $+$ vorsetzt.

§. 12.

Die allgemeine Regel des Zusammenzählens läßt sich kurz so fassen: Man vereinige alle Ordnungen der nämlichen Periode in eine Summe, und setze alle diese Theilsummen verschiedener Perioden, mit Hilfe des Additionszeichens, in einen einzigen zusammenhängenden Ausdruck, welcher dann den vollendeten Akt des Zählens, die ganze Summe, darstellt. Um die verschiedenen Summen der Abtheilungen einer jeden Periode zu erhalten, muß man die Coëfficienten der Grundgröſſe in eine Summe bringen, und ihr die gemeinschaftliche Grundgröſſe nachsetzen; z. B. $2a + 3a = 5a$; $4a^2 + 5a^2 = 9a^2$; $5b^3 + 7b^3 = 12b^3$; u. s. w.

§. 13.

Sollen zusammengesetzte Ausdrücke in eine Summe gebracht werden, so schreibe man, der Bequemlichkeit wegen, die Ordnungen gleich-hoher Perioden in eine

Vertikalreihe untereinander, suche hierauf für jede solche Reihe die Summe, und verbinde alsdann die ungleichartigen Summen durch das Additionszeichen. Die Anwendung dieser Regeln soll nun in folgenden Beispielen gezeigt werden, und zwar

1) addire man $5a + 3b + 2c + 5 + 3a + 2b + c + 4 + 6a + b + 3c + 1$. Die Größen für dasselbe Zahlensystem werden auf folgende Weise geordnet:

$$\begin{array}{rcl}
 5a + 3b + 2c + 5 & 2) & 3a^2 + 4ab + 2b^2 \\
 3a + 2b + c + 4 & & 5a^2 + 2ab + b^2 \\
 6a + b + 3c + 1 & & + 3ab + 2b^2 \\
 \hline
 14a + 6b + 6c + 10. & & 8a^2 + 9ab + 5b^2.
 \end{array}$$

3) Man addire $7a^2b + 3abc + 8b^2c + 9c^3 + 5a^2b + 5b^2c + 3c^3 + 4a^2b + 4bc^2 + cd^2$.

§. 14.

B. Die Subtraktion — das Abzählen.

Subtrahiren wird jenes Verfahren genannt, wodurch eine Gröfse gesucht wird, welche zu einer gegebenen Gröfse — *Subtrahendus* — addirt, eine andere ebenfalls gegebene Gröfse — *Minuendus* — wiederum erzeugt. Die gesuchte Zahl heifst *Rest* — *Unterschied* — *Differenz* — *Ueberschufs*; das Verfahren selbst wird durch das zwischen Minuendus und Subtrahendus gesetzte Zeichen — (minus) angedeutet.

Bei dieser Operation wird mithin eine Zahl aus zwei andern bestehend gedacht, in welche sie nun wieder zerlegt werden soll, wovon jedoch eine gegeben ist. Hieraus erhellet, daß die Subtraktion der Addition gänzlich entgegengesetzt ist; diese ist also ein eigentliches Verbindungsgeschäft, jene hingegen das Trennungsverfahren. Hat man daher durch Addition eine Zahl a erhalten, und ist b ein Bestandtheil derselben; so ist nothwendig der übrig bleibende Bestandtheil $a - b$; wäre $a = 10$, und $b = 4$, so hätte man $a - b = 10 - 4 = 6$.

§. 15.

Aus der Definition des Subtrahirens ergibt sich leicht ein doppeltes Verfahren, den unbekannten Bestandtheil der gegebenen Summe zu bestimmen: denn man kann entweder dem Minuend so viele Einheiten abzählen, als der Subtrahend selbst enthält; oder man kann dem Subtrahend so viele Einheiten zuzählen, bis er dem Minuend gleich wird; die Menge der bei den beiden Verfahrensarten gezählten Einheiten ist der gesuchte Unterschied.

§. 16.

Oft erscheinen jedoch sowohl die abzuzählenden als auch die zu verbindenden Bestandtheile, welche eine Gröfse bilden sollen, noch gesondert, wie $3a - 2b + 8a - b$; in einem solchen Falle vereinige man zuerst alle unter sich gleichartigen Gröfsen, welche noch überdies mit demselben Zeichen behaftet sind, und setze die erhaltenen Bestandtheile mit ihren Zeichen in den Rest. Man hat daher

$$3a + 8a - 2b - b = 11a - 3b.$$

Finden sich jedoch Glieder einer und derselben Periode der nämlichen Grundgröfse mit entgegengesetzten Zeichen; so zähle man den der Einheitenanzahl nach kleinern Coëfficienten vom gröfsern ab; der Ueberrest behalte das Zeichen des gröfsern Coëfficienten mit der gemeinschaftlichen Grundgröfse; diese einzelnen Reste zusammengenommen geben den Gesamtunterschied.

Um diefs durch ein Beispiel zu erläutern, seien folgende Gröfsen gegeben: $3a - 2b - 4c + 5a + + 3b - 8c - 4a + 5b + 7c + 8a - b - 2c - - 3a - b + 7c$, welche nach dem oben Gesagten auf folgende Weise zu ordnen sind:

$3a + 3b + 7c$	$- 4a - 2b - 4c$
$5a + 5b + 7c$	$- 3a - b - 2c$
$8a$	$- b$
$16a + 8b + 14c$	$- 7a - 4b - 6c$

folglich hat man

$$\begin{array}{r}
 16 a + 8 b + 14 c \\
 - 7 a - 4 b - 6 c \\
 \hline
 9 a + 4 b + 8 c.
 \end{array}$$

§. 17.

Ist aber der Subtrahend selbst eine zusammengesetzte, d. h. aus mehrern Theilen bestehende Gröfse; so müssen zur klaren Einsicht des dabei zu beobachtenden Verfahrens folgende Grundsätze in Verbindung gebracht werden:

1. Wenn eine Gröfse zu sich selbst mit verändertem Zeichen gezählt werden soll, so heben sie sich wechselseitig auf, und dieses Resultat wird durch Null bezeichnet; es ist nämlich $5 a - 5 a = 0$, oder $- 5 a + 5 a = 0$.

2. Ist der Subtrahendus Null, so ist der Unterschied dem Minuendus selbst gleich; z. B. $5 a - 0 = 5 a$.

3. Wird zum Minuendus und zum Subtrahendus dieselbe Gröfse addirt, so bleibt die Differenz unverändert. Wären $5 a$ der Minuendus, und $3 a$ der Subtrahendus, so hätte man $5 a - 3 a = 2 a$; zählt man nun $4 a$ zu $5 a$, so ist $9 a$ der Minuendus, und zählt man auch $4 a$ zu $3 a$, so erhält man $7 a$ zum neuen Subtrahendus, und der Unterschied $9 a - 7 a = 2 a$, ist wie zuvor.

§. 18.

Die Verbindung dieser Wahrheiten führt zu folgendem Schlusse: Man mache den Subtrahendus zu Null, indem man ihn mit entgegengesetzten Zeichen zu sich selbst zähle; dadurch wäre der Unterschied dem Minuendus gleich, allein er ist gerade durch dieses Verfahren um eben soviel zu groß, als der entgegengesetzte Subtrahend anzeigt; damit nun der wahre Rest erhalten werde, muß der Subtrahend mit veränderten Zeichen zum Minuend gezählt werden, das hiedurch erhaltene Resultat ist der gesuchte Unterschied. Die allgemeine Regel des Subtrahirens ist

daher folgende: Man verändere die Zeichen aller Glieder des Subtrahendus, und addire diese so veränderte Gröfse zum Minuendus nach §. 16, und das Resultat dieses Verfahrens ist der gesuchte Unterschied*).

Diese Regel durch ein Beispiel zu erläutern, sei

$$\text{Minuendus} \quad 8a - 7b - 2c$$

$$\text{Subtrahendus} \quad 4a - 9b - 3c$$

$$\quad \quad \quad - \quad \quad + \quad \quad +$$

$$\text{Differenz} \quad 4a + 2b + c;$$

wird nun diese Gröfse zum gegebenen Subtrahendus gezählt, so ergibt sich offenbar der gegebene Minuendus wieder. Zur Uebung dienen folgende Beispiele: 1) *Minuendus* ($a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5$); *Subtrah.* ($a^4b + a^3b^2 + a^2b^2 + ab^4$). 2) *Min.* ($5a^3 - 4a^2b + 3b^2c$); *Subtr.* ($3a^2b - 2a^3 - 8b^2c$). 3) *Min.* ($4ab - cd - 2b^2 + 3a^2$); *Subtr.* ($5ab - 4cd + 3b^2 + 3a^2$).

§. 19.

C. Die Multiplikation — das Vervielfachen —.

Eine Gröfse durch eine andere *vervielfachen* oder *multipliciren* heisst, aus einer der beiden gegebenen Gröfßen (*Multiplikandus*) eine dritte Gröfse (das *Produkt*) so bilden, als wie die andere gegebene Gröfse (der *Multiplikator*) aus der Einheit entstanden ist. Die gegebenen Zahlen heissen *Faktoren*; das Geschäft selbst wird durch das Zeichen $\times$, oder einen Punkt, welches man zwischen die Faktoren schreibt, angedeutet.

*) Diese Regel lässt sich auch noch auf folgende Art beweisen: Von a soll die Gröfse $-b$ abgezählt werden; es ist $a = a + b - b$; nun aber heisst $-b$ von a abziehen ebensoviel, als $-b$, in dem umgeformten Ausdrucke für a , aufheben, wodurch sich $a + b$ ergibt. Wäre $c - b$ von a zu subtrahiren, so schreibe man $a = a + c - b - c + b$; hebt man in diesem Ausdrucke die Gröfse $c - b$ auf, so bleibt noch $a - c + b$. Wäre $a - bc$ der Minuend, und $c - b$ der Subtrahend, so hätte man ebenfalls $(a - bc) = (a - bc) + c - b - c + b$, und der Rest $(a - bc) - c + b$.

§. 20.

Es ist keinem Zweifel unterworfen, daß die Faktoren mit den nämlichen, oder auch mit denselben Zeichen behaftet sein können. Es fragt sich nun, welches Zeichen dem Produkte jedesmal vorgesetzt werden müsse. Hierüber ist folgendes zu bemerken.

1. Es seien $+4$ und $+5$ die Faktoren, und es soll aus $+4$ eine Zahl gebildet werden, wie $+5$ aus der Einheit entstanden ist: nun aber entsteht $+5$ so aus der Einheit, indem diese mit ihrem Zeichen fünfmal zu sich selbst gezählt wird; es muß mithin auch $+4$ mit seinem Zeichen fünfmal zu sich selbst gezählt werden, wodurch man erhält $+4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$. Es wird nun nicht schwer sein, den Beweis für die umgekehrten Faktoren $+5$ und $+4$ zu führen.

2. Es seien weiter $+4$ und -5 die Faktoren, so soll aus $+4$ eine Zahl gebildet werden, wie -5 aus der Einheit; nun aber entsteht -5 aus der Einheit, indem diese, in ihr Entgegengesetztes verwandelt, fünfmal zu sich gezählt wird; es muß also auch der Faktor 4 zuerst in sein Entgegengesetztes verwandelt, und in diesem Zustande fünfmal zu sich selbst gezählt werden: da aber -4 das Entgegengesetzte von $+4$ ist, so hat man $-4 - 4 - 4 - 4 - 4 = -20$.

Wäre hingegen -4 der eine, und $+5$ der andere Faktor, so müßte aus -4 eine Zahl erzeugt werden, wie $+5$ aus der Einheit entsteht; da nun $+5$ aus der Einheit gebildet wird, indem sie fünfmal mit ihrem Zeichen zu sich selbst gezählt wird; so muß auch -4 mit seinem Zeichen fünfmal zu sich selbst gezählt werden, wodurch man -20 erhält.

3. Sind letztlich -4 und -5 die Faktoren, so soll aus -4 eine Zahl gebildet werden, wie -5 aus der Einheit; da nun -5 aus der Einheit gebildet wird, indem ihr erst das entgegengesetzte Zeichen vorgesetzt, und sie hierauf mit diesem Zeichen fünfmal zu sich selbst gezählt wird; so muß auch der Faktor -4 erst in sein Entgegengesetztes verwandelt,

und in diesem Zustande fünfmal zu sich selbst gezählt werden; weil aber $+4$ das Entgegengesetzte von -4 ist; so hat man zum Produkte $+4 +4 +4 +4 +4 = +20^*)$.

§. 21.

Hieraus ergeben sich folgende Regeln:

1. *In dem Werthe des Produkts kann nichts geändert werden, wenn man die Ordnung der Faktoren umkehrt.*
2. *Haben die Faktoren gleiche Zeichen, so erhält das Produkt das Pluszeichen; sind hingegen die Zeichen der Faktoren ungleich, so wird dem Produkte das Zeichen — vorgesetzt.*

§. 22.

Sind die Faktoren allgemein durch Buchstaben gegeben, z. B. a und b , so muß a so oft zu sich selbst gezählt werden, als in b Einheiten enthalten sind; oder es muß b so oft genommen werden, als sich Einheiten in a finden. Das Resultat dieses Verfahrens wird dadurch angezeigt, daß die Faktoren nebeneinander, ohne Trennungszeichen, geschrieben werden, so daß $a \times b = ab = b \times a = ba$. — Käme noch eine dritte Gröfse c hinzu, so betrachte man ab als einen einzigen Faktor, und verfare wie vorhin, und es ist $ab \times c = abc$. Um eine gewisse Gleichförmigkeit in der Darstellung derartiger Produkte zu beobachten, pflegt man die Faktoren nach der Ordnung des Alphabets nebeneinander zu schreiben. Wäre nun $b = 3$, und $c = 4d$, so gienge das Produkt abc über in $a \times 3 \times 4d = 3 \cdot 4 ad = 12 ad$.

*) Daß $-4 \times 5 = -20$, oder $4 \times -5 = -20$, läßt sich auch noch auf folgende Weise anschaulich darstellen. Es ist $4 - 4 = 0$, wird nun durch 5 vervielfacht, so muß das Produkt Null sein; folglich muß, da $4 \times 5 = +20$, auch $-4 \times 5 = -20$ sein, sonst wäre ja das Produkt nicht Null. — Sind -4 und -5 die Faktoren, so multiplicire man $4 - 4 = 0$ durch 5, welches Produkt Null sein muß: da nun $-4 \times 5 = -20$, so muß, damit das Produkt Null wird, nothwendig $-4 \times -5 = +20$ sein.

Ferner setze man $a = b = c$, so geht ab über in aa , und abc in aaa . Nun aber ist nach §. 9, $aa = a^2$; $aaa = a^2a = a^3$, wo der Exponent 2 die Summe $1 + 1$ der beiden Faktoren a und a ist; der Exponent 3 aber die Summe $2 + 1$ der Exponenten der Faktoren a^2 und a^1 . Aus diesen Betrachtungen lassen sich folgende Regeln für die Multiplikation der Coëfficienten und Potenzen derselben Grundzahl herleiten:

1. *Man multiplicire erst die Coëfficienten der Faktoren, und setze nach ihrem Produkte das Produkt der Buchstaben; z. B. $3a \times 4b = 12ab$.*

2. *Sind die Grundgrößen der zu multiplicirenden Potenzen gleich, so hat man nur nöthig die Exponenten der Faktoren zu addiren, und diese Summe als Exponent der gemeinschaftlichen Grundgröße zu betrachten; die dadurch angezeigte Potenz ist das verlangte Produkt; z. B. $4ab \times 3a^2bc = 12a^3b^2c$.*

Es ist hier hinreichend zu bemerken, daß die Potenzen gleicher Grundgrößen auch mit negativen Exponenten behaftet sein können; in diesem Falle wird ihre Addition nach §. 16 verrichtet, wie z. B. $4a^6 \times 5a^{-3}b = 20a^3b$. Hieraus geht zugleich hervor, daß jedes Produkt zu jeder Potenz erhoben wird, wenn man jeden Faktor zur gesagten Potenz erhebt, und diese Potenzen unter sich vervielfacht. So z. B. ist $(ab)^3 = a^3b^3$; $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$; das Umgekehrte muß ebenfalls Statt finden.

§. 23.

I. Beispiele für einen eintheiligen Multiplikator.

- 1) $(2a^4 - 3a^3b - 5a^2b^2 + b^3) \times a^3 = 2a^7 - 3a^6b - 5a^5b^2 + a^3b^3$. 2) $(6a + 3b - 5f) 5g$.
 3) $(a^2 + 2ab + b^2) b$. 4) $(7ab - 15bc - 16acf) 10ab$.
 5) $(a^2b - 4abc - 5b^2cd + 2acd^2) \times -7ac$.

II. Beispiele für zwei und mehrtheilige Multiplikatoren. Das Verfahren ist dem ganz ähnlich, dessen man sich bedient, wenn die Theile der Multiplikation Glieder der natürlichen Zahlenreihe 1, 2, 3, . . . sind: es wird nämlich der ganze Multiplikandus durch jeden

Theil des Multiplikators nach der in I. angezeigten Art multiplicirt; die dadurch erhaltenen Partialprodukte werden nach §§. 13 und 16 zum Gesamtprodukte vereinigt, wie aus folgenden Beispielen zu ersehen ist.

$ \begin{array}{r} 1) \quad a + b \\ \quad a + b \\ \hline a^2 + ab \\ + ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \\ = (a + b)^2 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 2) \quad a - b \\ \quad a - b \\ \hline a^2 - ab \\ - ab + b^2 \\ \hline a^2 - 2ab + b^2 \\ = (a - b)^2 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 3) \quad a + b \\ \quad a - b \\ \hline a^2 + ab \\ - ab - b^2 \\ \hline a^2 - b^2 \end{array} $
---	---	---

Die Formeln 1 und 2 enthalten die Theile, aus welchen das Quadrat der Summe oder Differenz zweier Gröſsen bestehen muß; die Formel 3 lehrt die Zerlegung der Differenz zweier Quadrate in seine einfachen Faktoren, wovon der eine die Summe der Wurzeln, der andere die Differenz der Wurzeln ist, jedoch mit dem Bemerkten, daß in dem zweiten Faktor jenes Glied das Zeichen — vor sich haben muß, welches dem negativen Quadrate entspricht; so z. B. ist $16a^2 - 9b^2 = (4a + 3b)(4a - 3b)$.

$$\begin{array}{r}
 4) \quad a^2 + 2ab + b^2 \\
 | \quad a + b \\
 \hline
 a^3 + 2a^2b + ab^2 \\
 + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\
 \hline
 a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3;
 \end{array}$$

dies ist die allgemeine Formel des Kubus, oder der dritten Potenz einer zweitheiligen Gröſse, vermittelt welcher sich leicht auf die Form von $(a - b)^3$ schließen läßt.

$$\begin{array}{l}
 5) (a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2 - 8ab^3 + 16b^4)(a + 2b). \\
 6) (2a^4 - 3a^3b - 5a^2b^2)(a^3 - 2a^2b + 3ab^2). \\
 7) (5a^3 - 4a^2b + 5ab^2 - 3b^3)(4a^2 - 5ab + 2b^2). \\
 8) (5a^7b - 3a^3b^5 + 4a^6b^2)(8a^6 - 2a^4b^2 - 3a^5b). \\
 9) (a^m + b^p - 2c^n)(2a^m - 3b + 4c^n).
 \end{array}$$

§. 24.

D. Die Division — das Messen.

Unter der *Division* versteht man jenes Verfahren, mit Hilfe dessen jener Faktor — *Quotient* — aufgesucht wird, welcher ebenso aus der Einheit entsteht, als ein gegebenes Produkt — nun *Dividendus* genannt — aus einem gegebenen Faktor — nun *Divisor* — entstanden ist. Aus dieser Erklärung geht hervor, daß die Division das umgekehrte Verfahren der Multiplikation ist.

§. 25.

Sind $+20$ der Dividendus, und $+5$ der Divisor, so soll, vermöge des Begriffes der Division, aus der Einheit eine Zahl gebildet werden, wie das Vielfache $+20$ aus $+5$ erzeugt worden ist; nun aber kann $+20$, als ein Vielfaches von 5, nicht anders aus 5 gebildet werden, als daß $+5$ einigemal zu sich selbst gezählt werde. Hieraus folgt, daß der Quotient nur das positive Zeichen haben kann, wenn nämlich die Divisionstheile das Zeichen $+$ haben.

Soll $+20$ durch -5 gemessen werden, so ist aus der Einheit eine Zahl zu bilden, wie das Vielfache $+20$ aus -5 ; nun aber läßt sich $+20$ nicht anders aus -5 hervorbringen, als wenn -5 mit entgegengesetztem Zeichen viermal zu sich selbst gezählt wird. Es ist also nothwendig, daß auch die Einheit mit entgegengesetztem Zeichen viermal zu sich selbst gezählt werde, woraus der Quotient -4 entsteht.

Ist -20 durch $+5$ zu dividiren, so muß aus der Einheit eine Zahl gebildet werden, wie -20 als ein Vielfaches aus $+5$ zusammengesetzt ist; nun aber läßt sich -20 nicht anders aus $+5$ bilden, als wenn man erst 5 in sein Entgegengesetztes verwandelt, und dieses viermal zu sich selbst zählt; es ist hieraus klar, daß auch die Einheit mit ihrem entgegengesetzten Zeichen viermal genommen werden muß; folglich ist $-20 : +5 = -4$.

Sind endlich -20 und -5 die gegebenen Zahlen, so muß eine dritte Zahl ebenso aus der Einheit zusammengesetzt werden, wie -20 als ein Vielfaches aus -5 gebildet worden ist; da nun -20 aus -5 entsteht, indem -5 mit Beibehaltung seines Zeichens viermal zu sich selbst gezählt wird; so muß auch die Einheit mit ihrem Zeichen viermal zu sich addirt werden, wodurch der Quotient $+4$ entsteht.

Aus den obigen Erklärungen fließt folgende Regel für das Zeichen des Quotienten, nämlich: *Haben Divisor und Dividendus das nämliche Zeichen, so nimmt der Quotient das Zeichen $+$ vor sich; sind hingegen die Zeichen des Divisors und Dividendus verschieden, so erhält der Quotient das Minuszeichen.*

§. 26.

Da bei der Multiplikation dasselbe Produkt erhalten wird, ob man einen Faktor durch ein Produkt, oder nach und nach durch die Faktoren desselben vervielfacht; so ist es auch einerlei, ob durch ein Produkt auf einmal, oder nach und nach durch dessen Faktoren dividirt wird. Da ferner jede GröÙe durch sich selbst dividirt die Einheit zum Quotienten giebt; so ergeben sich für die Division folgende Regeln:

1. *Der Coëfficient des Dividendus wird durch den Coëfficienten des Divisors, wie die Zahlen des dekadischen Systems, dividirt, und die dadurch erhaltene Zahl ist der Coëfficient des Quotienten.*

2. *Sind in beiden Theile der Division gleiche Grundgrößen, so heben diese sich gegeneinander auf; Potenzen derselben GrundgröÙe werden also dividirt, indem der Exponent des Divisors vom Exponenten des Dividendus abgezogen, und dieser Unterschied der GrundgröÙe als Exponent beigegeben wird; z. B. $7a^3 : a^2 = 7a^{3-2} = 7a$; weil nämlich $7a^3 = 7aaa$, und $a^2 = aa$, mit-*

hin $7a^3 : a^2 = \frac{7a}{1} = 7a$.

3. In dem Werthe des Quotienten kann also nichts geändert werden, wenn die beiden Theile der Division durch dieselbe Gröfse vervielfacht, oder selbst zuerst dividirt werden; z. B. $ab^2 : ab = b$, folglich auch $mab^2 : mab = b$.

Weil ferner $a^3 : a^4 = a^{3-4} = a^{-1}$, und $a^3 : a^4 = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot a} = \frac{1}{a}$, so muß auch sein $a^{-1} = \frac{1}{a}$, und allgemein $a^{m-n}b^{-3} = a^m \cdot a^{-n}b^{-3} = \frac{a^m}{a^n b^3}$. Hieraus folgt

4. dafs jede Potenz mit einem negativen Exponenten gleich ist der absoluten Einheit dividirt durch dieselbe Potenz mit positivem Exponenten.

Umgekehrt kann man jede Gröfse aus dem Divisor in den Dividendus versetzen, wenn man nur das Zeichen des Exponenten verändert; z. B. $m : a^3 = ma^{-3}$; $m : a^{-3} = ma^3$. Der Grund dieses Verfahrens ist offenbar dieser, dafs $m : a^3 = ma^{-3} : a^3 \times a^{-3} = ma^{-3} : 1$.

§. 27.

Ist der Dividendus vieltheilig, der Divisor aber nur eine eintheilige Gröfse, so läfst sich die Division leicht verrichten, wenn man, mit Beobachtung der vorhin angegebenen Regeln, jedes Glied des Dividendus durch den Divisor dividirt; die Summe der einzelnen Quotienten giebt den gesuchten Quotienten, wie aus folgenden Beispielen erhellen wird:

$$\begin{aligned} 1) & (2abc - 4a^2c + 6ac^2) : 2c = ab - 2a^2 + 3ac. \\ 2) & (8a^2 - 6ab + 4c - 10a^3) : -2a = -4a + 3b - \\ & - 2a^{-1}c + 5a^2. \quad 3) (7a^3bc - 28a^2bc^2 - 35ab^2c^2d + \\ & + 14a^2c^2d^2) : 7ac = a^2b - 4abc - 5b^2cd + 2acd^2. \end{aligned}$$

§. 28.

Sind Dividendus und Divisor mehrtheilige Gröfsen, so läfst sich die Division auf folgende Art ohne Schwierigkeit verrichten:

1. Man ordne Dividendus und Divisor nach den abnehmenden Potenzen der nämlichen Grundgröfse.

2. Hierauf dividire man nach §. 27 das Glied des Dividendus, welches die höchste Potenz der gemeinschaftlichen Grundgröfse enthält, durch das höchste Glied des Divisors.

3. Durch den in Art. 2. erhaltenen Quotienten multiplicire man alle Glieder des Divisors, und subtrahire dieses Produkt nach §. 18 vom Dividendus; der Rest wird als neuer Dividendus wiederum nach den Potenzen der nämlichen Grundgröfse geordnet, und nach Art. 2 behandelt.

§. 29.

Beispiele. 1)
$$\begin{array}{r|l} a^2 + 2ab + b^2 & a + b \text{ Divisor.} \\ a^2 + ab & a + b \text{ Quotient.} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + ab + b^2 \\ ab + b^2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 \quad 0 \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r|l} a^8 - 16b^8 & a^2 - 2b^2 \text{ Divisor.} \\ a^8 - 2a^6b^2 & a^6 + 2a^4b^2 + 4a^2b^4 + 8b^6. \\ \hline \end{array}$$

$$+ 2a^6b^2 - 16b^8$$

$$2a^6b^2 - 4a^4b^4$$

$$- +$$

$$+ 4a^4b^4 - 16b^8$$

$$4a^4b^4 - 8a^2b^6$$

$$- +$$

$$+ 8a^2b^6 - 16b^8$$

$$8a^2b^6 - 16b^8$$

$$- +$$

$$0 \quad 0$$

$$\begin{array}{r|l}
 3) \quad a^6 + 2a^3b^3 - a^2b^4 + ab^5 & a^2 - ab + b^2 \\
 \quad a^6 - a^5b + a^4b^2 & \hline
 \quad - \quad + \quad - & a^4 + a^3b + ab^3. \\
 \hline
 & + a^5b - a^4b^2 + 2a^3b^3 - a^2b^4 + ab^5 \\
 & a^5b - a^4b^2 + a^3b^3 \\
 & - \quad + \quad - \\
 & \hline
 & + a^3b^3 - a^2b^4 + ab^5 \\
 & a^3b^3 - a^2b^4 + ab^5 \\
 & - \quad + \quad - \\
 & \hline
 & 0 \quad 0 \quad 0
 \end{array}$$

Drittes Kapitel.

Rechnungsarten mit gebrochenen Zahlen.

§. 30.

Eine *gebrochene Zahl* — ein *Bruch* — ist der Ausdruck eines einzigen oder mehrerer gleichen Theile eines Ganzen, als $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{a}{b}$. Man theilt die Brüche ein in *ächte* und *unächte*, je nach dem der Zähler kleiner, oder größer als der Nenner, oder der Zähler dem Nenner gleich ist; zur ersten Art gehören $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$; zur letztern $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{2}$. Diese Art von Brüchen läßt sich immer in eine ganze Zahl und einen ächten Bruch zerlegen, indem man den Zähler durch den Nenner dividirt, den Quotienten als ganze Zahl hinschreibt, und den Rest als Zähler des ächten Bruchs mit Beibehaltung des Divisors als Nenner betrachtet. Man hat also nach dieser Erklärung $\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3} = 1\frac{1}{3}$. Derlei Brüche werden auch *gemischte* genannt.

§. 31.

Hieher gehört noch eine Art Brüche, deren Nenner die Potenzen der Zahl 10 sind, und welche aus diesem Grunde *Decimalbrüche* heißen; sie gewähren in der Rechnung manchen erheblichen Vortheil, weil man in der Ausübung, oder bei ihrem Gebrauche, ihre Nenner nur dadurch anzeigt, daß man durch einen Strich von der Rechten zur Linken so viele Ziffern — *Decimalstellen* — im Zähler abschneidet, als im Nenner Nullen sein müßten; die vor dem Striche sich befindenden Ziffern bedeuten die Ganzen; wo aber die Ganzen fehlen, da wird ihre Stelle durch eine Null ausgefüllt, welches auch dann geschieht, wenn Decimalziffern fehlen. Man schreibt daher $\frac{18}{10} = 1,8$; $\frac{18}{100} = 0,18$; $\frac{18}{1000} = 0,018$.

Vergleicht man die Bedeutung eines Decimalbruchs mit §. 26 Nro. 3, so begreift man leicht, *daß der Werth eines Decimalbruchs unverändert bleibt, wenn man hinter den Decimalziffern Nullen nach Belieben setzt, oder wenn solche sich schon vorfinden, dieselben ausstreicht.* Es ist also $0,8 = 0,800$; umgekehrt $0,18000 = 0,18$.

§. 32.

Da ein Bruch durch zwei Zahlen ausgedrückt wird, so muß sein Werth auch von der Beschaffenheit und dem wechselseitigen Verhältnisse dieser beiden Zahlen abhängen.

Nimmt man ein Vielfaches vom Zähler des Bruchs $\frac{5}{6}$, z. B. das Siebenfache, so wird dadurch der Werth des gegebenen Bruchs $\frac{5}{6}$ um das Siebenfache erhöht, und man hat $\frac{35}{6}$, welcher Bruch also siebenmal größer als der gegebene $\frac{5}{6}$ ist. — Man nehme nun das Siebenfache des Nenners im Bruche $\frac{35}{6}$, so wird der Werth dieses Bruchs um das Siebenfache seines Werthes vermindert, weil man nämlich dieselbe Anzahl Theile beibehält, wovon aber jeder nur der siebente Theil eines sechsten Theils ist; man hat also den Bruch $\frac{35}{42}$, welcher siebenmal kleiner als der

Bruch $\frac{3^5}{6}$ ist, mithin ist $\frac{3^5}{6}$ siebenmal gröfser, als $\frac{3^5}{42}$, oder $\frac{3^5}{6}$ ist das Siebenfache von $\frac{3^5}{42}$; es ist also

$$\frac{3^5}{6} = 7 \times \frac{3^5}{42};$$

nun ist aber auch $\frac{3^5}{6} = 7 \times \frac{5}{6}$, da nun zwei Gröfsen $7 \times \frac{3^5}{42}$ und $7 \times \frac{5}{6}$ der nämlichen dritten $\frac{3^5}{6}$ gleich sind, so sind sie auch unter sich gleich; es ist daher

$$7 \times \frac{5}{6} = 7 \times \frac{3^5}{42};$$

weil nun die siebenfachen Gröfsen $\frac{5}{6}$ und $\frac{3^5}{42}$ unter sich gleich sind, so müssen auch die einfachen Gröfsen wiederum gleich sein, folglich

$$\frac{5}{6} = \frac{3^5}{42} = \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 7}.$$

Werden daher Zähler und Nenner eines Bruches durch dieselbe Zahl vervielfacht, so bleibt der Werth eines Bruchs unverändert.

§. 33.

Wird der Nenner eines Bruchs durch eine Zahl dividirt, so werden dadurch die Theile des Ganzen gröfser, von denen, wegen des unveränderten Zählers, dieselbe Anzahl beibehalten wird; der Bruch ist also um sovielman gröfser, als der Nenner vermindert worden ist. Ist $\frac{8}{14}$ der gegebene Bruch, und man dividirt den Nenner durch 2, so ist $\frac{8}{7}$ das Resultat, folglich

$$\frac{8}{7} = 2 \times \frac{8}{14};$$

dividirt man nun den Zähler 8 des Bruchs $\frac{8}{7}$ ebenfalls durch 2, so wird dadurch der Bruch zweimal kleiner, denn man hat nur $\frac{4}{7}$ statt $\frac{8}{7}$, folglich ist $\frac{8}{7}$ doppelt so grofs, als $\frac{4}{7}$; man hat daher

$$\frac{8}{7} = 2 \times \frac{4}{7};$$

vergleicht man diesen Werth von $\frac{8}{7}$ mit dem vorhergehenden, so ist

$$2 \times \frac{8}{14} = 2 \times \frac{4}{7},$$

und da die doppelten Brüche gleich sind, so müssen es auch die einfachen sein, mithin

$$\frac{8}{14} = \frac{4}{7} = \frac{2 \cdot 4}{2 \cdot 7}.$$

Hieraus folgt, *dafs der Werth eines Bruchs auch unverändert bleibt, wenn sein Zähler und sein Nenner durch die nämliche Zahl dividirt werden**).

§. 34.

1. Mittelst des im §. 32 bewiesenen Grundsatzes kann man jede ganze Zahl, welche immer durch 1 dividirt angesehen wird, in einen Bruch verwandeln, dessen Nenner gegeben ist. Wären a die ganze Gröfse, und $\frac{b}{c}$ der Bruch, so hätte man $a + \frac{b}{c} = \frac{ac + b}{c}$;

$$7\frac{3}{4} = 7 + \frac{3}{4} = \frac{7 \cdot 4}{4} + \frac{3}{4} = \frac{28}{4} + \frac{3}{4} = \frac{31}{4}. \quad \text{Und}$$

im Allgemeinen läfst sich jeder gemischte Bruch in einen unächten verwandeln, indem man die ganze Zahl durch den Nenner des angehängten Bruchs vervielfacht, den Zähler dazu zählt, und der Summe den gemeinschaftlichen Nenner giebt.

2. Ferner lassen sich gegebene Brüche von verschiedenen Nennern in andere, mit unveränderten Werthen, verwandeln, welche gleiche Nenner haben, d. h. Brüche lassen sich unter gleiche Benennung bringen, wenn Zähler und Nenner eines jeden Bruchs durch das Produkt der Nenner der übrigen Brüche multiplicirt werden. Sind $\frac{5}{7}$ und $\frac{8}{9}$ die gegebenen Brüche,

$$\text{so ist } \frac{5}{7} = \frac{5 \cdot 9}{7 \cdot 9} = \frac{45}{63}, \quad \frac{8}{9} = \frac{8 \cdot 7}{9 \cdot 7} = \frac{56}{63}. \quad \text{— Sind } \frac{5}{7},$$

*) Diese und die vorhergehende Wahrheit lassen sich auch auf folgendem Wege beweisen. Es ist nämlich nach §. 26

$$a^1 \times a^{-1} = \frac{a}{a} = a^0 = 1; \text{ giebt man nun einem Bruche } \frac{5}{6}$$

die Form 5×6^{-1} , so läfst sich dieser Ausdruck durch jeden Faktor wie $a^1 \times a^{-1}$ vervielfachen, weil das Produkt dieser Faktoren gleich 1 ist; man hat daher $5 \cdot 6^{-1} = 5 \cdot 6^{-1} \cdot a \cdot a^{-1} = 5a \cdot 6^{-1}a^{-1}$; nun ist aber $6^{-1}a^{-1} = (6a)^{-1}$, mithin, wenn man diesen Ausdruck in den Nenner versetzt, wird sein $\frac{5}{6} = \frac{5a}{6a}$.

Ebenso wird gezeigt, dafs $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$; denn es ist $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = 12 \times \times 24^{-1} = 12 \times 2^{-1} \times 12^{-1} = 1 \cdot 2^{-1} = \frac{1}{2}$.

$\frac{8}{9}, \frac{4}{5}$ gegeben, so hat man $\frac{5}{7} = \frac{5 \cdot 9 \cdot 5}{7 \cdot 9 \cdot 5}; \frac{8}{9} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 5}{9 \cdot 7 \cdot 5};$

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 9 \cdot 7}{5 \cdot 9 \cdot 7}.$$

§. 35.

Das Verfahren, Brüche unter einerlei Benennung zu bringen, kann bedeutend abgekürzt werden, wenn einige oder alle Nenner gemeinschaftliche Faktoren haben. In diesem Falle zerlege man einen jeden Nenner in Faktoren, wovon keiner mehr in andere Faktoren zerlegbar ist, die also außer der Einheit keinen gemeinschaftlichen Faktor mehr haben, und deshalb *Primzahlen unter sich* genannt werden; hierauf nehme man von einem jeden Faktor die höchste Potenz, die sich vorfindet, und vervielfache diese Potenzen untereinander, welches Produkt der gemeinschaftliche Nenner ist.

Es seien $\frac{19}{324}$ und $\frac{67}{320}$ die gegebenen Brüche, so hat man $324 = 27 \times 12 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 3^4 \cdot 2^2$; $320 = 64 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^6 \cdot 5$, der gemeinschaftliche Nenner ist also $3^4 \cdot 2^6 \cdot 5 = 81 \cdot 64 \cdot 5 = 25920$. — Um aber auch den Faktor zu finden, durch welchen der Zähler vervielfacht werden muß, dividirt man die Zahl 25920 durch jeden Nenner, der Quotient ist der verlangte Faktor, der immer eine ganze Zahl sein muß*), weil in dem gemeinschaftlichen Nenner 25920 eines jeden Nenners Faktoren enthalten sind; im vorliegenden Falle hat man $\frac{25920}{324} = 80$; $\frac{25920}{320} = 81$, folglich $\frac{19}{324} = \frac{80 \cdot 19}{25920} = \frac{1520}{25920}$,

und der Bruch $\frac{67}{320} = \frac{81 \cdot 67}{25920} = \frac{5427}{25920}$.

Zur Uebung mögen folgende Beispiele dienen:

1) $\frac{5}{304}, \frac{7}{2880}, \frac{11}{864};$

2) $\frac{19}{32}, \frac{21}{40}, \frac{41}{54}, \frac{9}{36}, \frac{11}{63}, \frac{17}{72}, \frac{31}{81};$

3) $\frac{13}{48}, \frac{33}{72}, \frac{19}{75}, \frac{79}{120}, \frac{83}{144}, \frac{121}{180}, \frac{143}{216}.$

*) Gauss disquisitiones arithm. pag. 11.

Hier könnte man allerdings die Frage vorlegen, wie eine Zahl in ihre Faktoren, welche Primzahlen, wie 2, 3, 5, 7, 11, 13, -... sind, zerlegt werden könne? Vorläufig mag Folgendes dienen: Man dividire die Zahl zuerst durch 2, so oft als es möglich ist; den Rest hierauf durch 3, und dann die fernern Reste im Allgemeinen durch Primzahlen.

§. 36.

Damit Brüche addirt, oder voneinander subtrahirt werden können, müssen sie gleichartig sein, d. h. sie müssen gleiche Theile des nämlichen Ganzen ausdrücken, folglich von einerlei Benennung sein. Haben nun Brüche ungleiche Nenner, so bringe man sie nach den oben §. 34 angeführten Regeln unter gleiche Benennung; ist dieß geschehen, so *addirt man die Zähler, wenn die Brüche addirt werden sollen, oder man subtrahirt die Zähler, wenn die Brüche subtrahirt werden sollen, und schreibt unter das Resultat des Addirens oder Subtrahirens den gemeinschaftlichen Nenner.*

§. 37.

1) Man suche die Summe der Brüche:

$$243\frac{2}{3} + 572\frac{3}{4} + 107\frac{5}{6} + 83\frac{7}{16} + 9\frac{1}{24}.$$

Werden diese Nenner in ihre Faktoren zerlegt, so hat man $3=3$; $4=2^2$; $6=2 \cdot 3$; $16=2^4$, $24=2^3 \cdot 3$; mithin $2^4 \cdot 3 = 48 =$ dem gemeinschaftlichen Nenner, welcher nun durch jeden Nenner dividirt werden muß, um den Faktor zu erhalten, durch welchen der Zähler zu multipliciren ist. Das ganze Verfahren erkennt man aus folgendem Schema:

	Zähler.	
$243\frac{2}{3}$	32	48 der gem. Nenner.
$572\frac{3}{4}$	36	
$107\frac{5}{6}$	40	
$83\frac{7}{16}$	21	
$9\frac{1}{24}$	22	
101748	151	3 Ganzen.

Hier hat man 151 für die Summe der Zähler, und werden hieraus die Ganzen gezogen, so erhält man 3 und den ächten Bruch $\frac{7}{48}$.

2) Soll $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{4}$ abgezogen werden, so bringe man sie unter gleiche Nenner, und man erhält: $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{9}{12} - \frac{8}{12} = \frac{9-8}{12} = \frac{1}{12}$.

3) Sollen endlich gemischte Brüche, z. B. $347\frac{2}{3}$, und $239\frac{1}{4}$ voneinander abgezogen werden; so ziehe man erst die Brüche, und dann auch die ganzen Zahlen voneinander ab, oder auch umgekehrt. Man erhält $347\frac{2}{3} - 239\frac{1}{4} = (347 - 239) + (\frac{2}{3} - \frac{1}{4}) = 108\frac{5}{12}$.

Man kömmt zu demselben Resultate, wenn man die unächten Brüche zuerst einrichtet (§. 34), und sie nach Art. 2 behandelt, aus dem Reste, wenn er ein unächter Bruch ist, wiederum die Ganzen zieht. Dieses Verfahren ist besonders dann von erheblichem Vortheile, wenn der abzuziehende Bruch grösser ist als der Minuendus. Indefs läßt sich auch für diesen Fall das obige Verfahren anwenden; man nimmt nämlich von der ganzen Zahl des Minuendus eine Einheit, und bringt sie unter gleiche Benennung des angehängten Bruchs, zu welchem der unächte addirt wird; hierauf verfähre man wie vorhin. Man hat z. B. $8\frac{2}{3} - 4\frac{3}{4} = 7 + \frac{3}{3} + \frac{2}{3} - 4\frac{3}{4} = (7 - 4) + (\frac{5}{3} - \frac{3}{4}) = 3\frac{11}{12}$.

§. 38.

Die Addition oder Subtraktion der Decimalbrüche bietet durchaus keine Schwierigkeit dar, man schreibe nur die gleichartigen Decimalziffer untereinander, d. h. Zehntel unter Zehntel, Hundertel unter Hundertel, u. s. w. und verfähre hierauf wie bei der Addition oder Subtraktion mit ganzen Zahlen; der Grund dieses Verfahrens läßt sich leicht aus §. 34 erkennen.

Hier folgen von beiden Rechnungsarten Beispiele:

Addition.

$$\begin{array}{r}
 3,48904 \\
 1,0321 \\
 0,842 \\
 \hline
 5,36314.
 \end{array}$$

Subtraktion.

$$\begin{array}{r}
 3,48904 \\
 1,56283 \\
 \hline
 1,92621.
 \end{array}$$

§. 39.

Ehe wir weiter gehen, wollen wir noch anmerken, daß der grössere oder kleinere Werth eines Bruchs im Verhältnisse zu einem andern Bruche aus dem kleinern oder grössern Zähler der unter einerlei Nenner gebrachten Brüche sich beurtheilen läßt. Wird also gefragt, welcher von beiden Brüchen $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ der grössere sei, so bringe man beide Brüche unter einerlei Benennung, und man erhält $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$, $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$, folglich $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$.

§. 40.

Bei der Multiplikation der Brüche gelten für die Zeichen die in §. 21 festgesetzten Regeln. Wendet man ferner dasjenige auf Brüche an, was im §. 20 von ganzen Faktoren auseinandergesetzt wurde; so wird man sich leicht von der Wahrheit folgender Regeln überzeugen.

1. Soll nämlich ein Bruch durch eine ganze Zahl vervielfacht werden, so dividire man entweder seinen Nenner durch die ganze Zahl (§. 33); oder, wenn dies ohne Rest nicht geschehen kann, vervielfache man den Zähler durch

$$\begin{aligned}
 &\text{die ganze Zahl; z. B. } \frac{7}{12} \times 6 = \frac{7}{12 : 6} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}; \\
 &\frac{7}{9} \times 4 = \frac{28}{9} = 3\frac{1}{9}.
 \end{aligned}$$

2. Ist hingegen eine ganze Zahl durch einen Bruch zu vervielfachen, z. B. 24 durch $\frac{3}{8}$, so heisst dies, vermöge des Begriffs der Multiplikation, ebensoviel, als man soll den achten Theil von 24 dreimal nehmen; man erhält $24 \times \frac{3}{8} = \frac{24}{8} \times 3 = 3 \cdot 3 = 9$.

3. Soll endlich ein Bruch durch seinen Nenner ver-

vielfacht werden, so braucht man nur seinen Nenner zu vernachlässigen. So ist $\frac{7}{9} \times 9 = \frac{7 \cdot 9}{9} = 7^*)$.

§. 41.

Ist der eine Faktor ein Decimalbruch, so multiplicire man die beiden Faktoren wie ganze Zahlen, im Produkte aber schneide man von der Rechten zur Linken so viele Decimalstellen ab, als im gebrochenen Faktor Ziffer auf das Komma folgen; z. B. $4,301 \times 7 = 30,107$; denn es ist $4,301 \times 7 = \frac{4301 \times 7}{1000} = \frac{30107}{1000} = 30,107$. — Das Verfahren ist dasselbe, wenn verlangt wird, daß eine ganze Zahl durch einen Decimalbruch vervielfacht werden soll.

§. 42.

Wäre einer der Faktoren ein gemischter Bruch, z. B. $4\frac{3}{8} \times 7$, so vervielfache man erst die ganze Zahl 4 durch 7, dann auch den Bruch $\frac{3}{8}$ durch den Multiplikator 7, und addire hierauf diese Theilprodukte, wodurch man erhält: $4\frac{3}{8} \times 7 = 4 \cdot 7 + \frac{3 \cdot 7}{8} = 28 + \frac{21}{8} = 28 + 2 + \frac{5}{8} = 30\frac{5}{8}$.

Oder man verwandle den gemischten Bruch in einen unächten, und verfähre dann nach §. 40. Das vorhergehende Beispiel erhält nun diese Form: $4\frac{3}{8} \times 7 = \frac{35 \cdot 7}{8} = \frac{245}{8} = 30\frac{5}{8}$.

§. 43.

Sind beide Faktoren Brüche, so vervielfache man Zähler durch Zähler und Nenner durch Nenner; das Produkt aus den Zählern ist der Zähler und das Produkt

*) Auch bei der Multiplikation der Brüche dienen folgende Bemerkungen: $\frac{7}{12} \times 6 = 7 \times 12^{-1} \times 6 = 7 \cdot 6 \cdot 12^{-1} = \frac{42}{12}$; $24 \times \frac{3}{8} = 24 \times 3 \times 8^{-1} = \frac{24 \times 3}{8}$; $\frac{6}{7} \times \frac{4}{5} = 6 \cdot 7^{-1} \times 4 \cdot 5^{-1} = (6 \cdot 4) (7 \cdot 5)^{-1} = 24 \cdot 35^{-1} = \frac{24}{35}$.

aus den Nennern der Nenner des gesuchten Produkts. Es ist daher $\frac{4}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 7} = \frac{12}{35}$; $\frac{a}{b} \times \frac{m}{n} = \frac{am}{bn}$. Man soll nämlich hier aus $\frac{4}{5}$ eine Zahl entstehen lassen, wie $\frac{3}{7}$ aus der Einheit erhalten wird; nun wird $\frac{3}{7}$ aus der Einheit so gebildet, indem man sie erst in 7 gleiche Theile theilt, und dann einen siebenten Theil dreimal nimmt; man muß daher auch $\frac{4}{5}$ in Siebentel verwandeln, und jeden solchen siebenten Theil dreimal nehmen. Da nun $\frac{4}{35}$ der siebente Theil von $\frac{4}{5}$ ist (§. 32), so muß dieser siebente Theil dreimal genommen werden. Hiedurch ergibt sich $\frac{12}{35}$.

Diese Regel läßt sich auch noch auf folgende Art beweisen. Würde der Bruch $\frac{4}{5}$ nur durch den Zähler 3 des Multiplikators $\frac{3}{7}$ vervielfacht, so wäre das Produkt $\frac{12}{35}$ siebenmal zu groß, weil durch eine Zahl vervielfacht wurde, welche siebenmal größer ist, als der Bruch $\frac{3}{7}$. Damit nun der Bruch $\frac{12}{35}$ wieder siebenmal kleiner werde, muß man seinen Nenner 5 durch 7 vervielfachen. Es ist daher $\frac{12}{5 \times 7} = \frac{12}{35}$ wie vorhin.

§. 44.

Sind die Faktoren Decimalbrüche, so vernachlässige man in beiden das Komma, und vervielfache die so erhaltenen ganzen Zahlen; in dem Produkte schneide man von der Rechten zur Linken so viele Decimalstellen ab, als sich in beiden Faktoren zugleich befinden; so z. B. $5,45 \times 0,3$ giebt nach gewöhnlicher Multiplikation $545 \times 3 = 1635$; in diesem Produkte schneide man drei Decimalziffer ab, weil in beiden Faktoren zusammen genommen drei Decimalziffer sich finden. Es ist daher $5,45 \times 0,3 = 1,635$. Denn es ist $5,45 \times 0,3 = \frac{545}{100} \times \frac{3}{10} = \frac{1635}{1000} = 1,635$.

§. 45.

Sind zuletzt beide Faktoren gemischte Brüche, so verwandle man sie zuerst in unächte Brüche, und multiplicire diese nach §. 40; z. B. $3\frac{1}{7} \times 4\frac{4}{5} = \frac{22}{7} \times \frac{24}{5} = \frac{528}{35} = 15\frac{3}{5}$.

Diese Multiplikation läßt sich indess auch noch auf folgende Weise verrichten: $(3 + \frac{1}{7}) (4 + \frac{4}{5}) =$
 $= 12 + \frac{4}{7} + \frac{12}{5} + \frac{4}{35} = 12 + 2 + \frac{4}{7} + \frac{2}{5} + \frac{4}{35} =$
 $= 14 + \frac{20 + 14 + 4}{35} = 14 + \frac{38}{35} = 15\frac{3}{35},$ wie
 vorhin.

§. 46.

Soll ein Bruch durch eine ganze Zahl dividirt, d. h. in mehrere gleichen Theile getheilt werden, so muß das Ganze zuerst in soviel Theile getheilt werden, als der Nenner des Bruchs Einheiten enthält; und hierauf jeder solche Theil abermals in soviel Theile, als die ganze Zahl Einheiten enthält; die Gröfse eines solchen Theils wird also durch das Produkt des Nenners in die ganze Zahl angezeigt; z. B. $\frac{1}{7} : 9 = \frac{1}{63}$. Sollen nun noch mehrere von diesen Theilen genommen werden; so hat man z. B. $\frac{5}{7} : 9 =$
 $= 5 \times \frac{1}{7} : 9 = 5 \times \frac{1}{63} = \frac{5}{63}$.

Wäre aber die ganze Zahl ein Faktor des Zählers, so könnte dieser in dem Endresultate aufgehoben werden (§. 33); statt dessen kann aber auch bloß der Zähler durch die ganze Zahl dividirt werden;

$$\text{z. B. } \frac{18}{19} : 9 = \frac{18 : 9}{19} = \frac{2}{19}.$$

Im Allgemeinen wird also ein Bruch durch eine ganze Zahl dividirt, wenn durch diese der Nenner des Bruchs vervielfacht, oder der Zähler des Bruchs durch die ganze Zahl dividirt wird.

§. 47.

Ist der Dividendus ein Decimalbruch, so dividire man denselben, ohne auf das Komma Rücksicht zu nehmen, durch die ganze Zahl, streiche aber im Quotienten von der Rechten zur Linken so viele Decimalziffer ab, als im Dividendus vorhanden waren; die fehlenden Stellen werden mit Nullen ausgefüllt; z. B. $4,7391 : 3 = 1,5797$;
 $0,0432 : 4 = 0,0108$; man hat nämlich hier immer

$$\frac{432}{4 \cdot 10000} = \frac{432}{10000} = \frac{108}{10000}.$$

§. 48.

Es ereignet sich indess sehr oft, dafs die ganze Zahl, womit man dividirt, nicht vollkommen in dem Decimalbruche enthalten ist, in welchem Falle man die Division bloß anzeigen könnte; allein gewöhnlich nimmt man zu folgendem Verfahren seine Zuflucht. Man setzt nach den Decimalziffern eine beliebige Anzahl Nullen, schreibt sie nach und nach hinter die Reste der Division, welche nun nach Belieben fortgesetzt werden kann; z. B. $0,478 : 7 = 0,478000 : 7 = 0,068285 \dots$; es läßt sich nämlich der gegebene

$$\text{Bruch so darstellen: } 0,478 : 7 = \frac{0,476}{7} + \frac{0,0020000\dots}{7};$$

je größer nun die Anzahl der Decimalstellen des letzten Bruchs ist, desto genauer erhält man den gesuchten Quotienten, ohne jedoch den Werth vollständig erreichen zu können. Ein solcher Decimalbruch heißt deshalb *unendlich*.

Das nämliche Verfahren ist auch anwendbar, *irgend einen gegebenen Bruch in einen zehntheiligen zu verwandeln*; man dividirt nämlich den Zähler durch den Nenner, und setzt nach dem hiedurch erhaltenen Quotienten ein Komma, dividirt hierauf jeden Rest, nach welchem man eine Null schreibt, durch den nämlichen Divisor, bis kein Rest mehr übrig bleibt, oder bis man den Werth des Bruchs genau genug bestimmt zu haben glaubt; z. B. $\frac{48}{13}$ wird in einen Decimalbruch verwandelt auf folgende Weise:

$$\begin{array}{r|l} 48 & 13 \\ \hline 39 & 3,6923\dots \\ \hline 90 & \\ 78 & \\ \hline 120 & \\ 117 & \\ \hline 30 & \\ 26 & \\ \hline 40 & \\ 39 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

Man hat nämlich hier zum Reste 9, welche Zahl man in zehn gleiche Theile theilt, und man fragt nun, wie oft 13 in 90 Zehntel enthalten ist, nämlich 6 mal, und 12 Zehntel bleiben übrig; welche wiederum in Zehntel getheilt, zur Frage führen, wie oft 13 in 120 Hundertel enthalten sind, u. s. w.

Geschieht es, daß man bei diesem Verfahren die nämlichen Decimalziffer in derselben Ordnung findet, so hat man einen *periodischen* Decimalbruch. So z. B. erhält man $3,54 : 7 = 0,50571428 \dots$ (Periode 571428). Mehrere Beispiele finden sich in *Meyer Hirsch, Sammlung von Beispielen etc. aus der Buchstabenrechnung und Algebra*. Indefs verdient hier noch angemerkt zu werden, daß nur jene Brüche in *vollständige* Decimalbrüche sich verwandeln lassen, deren Nenner unter der Form $10^m = 2^m \times 5^m$ begriffen sind; wie z. B. $\frac{1}{2} = 0,5$; $\frac{8}{25} = 0,32$; $\frac{3}{4} = 0,75$; $\frac{13}{16} = 0,8125$; $\frac{17}{20} = 0,85$; $\frac{3}{40} = 0,075$; $\frac{17}{124} = 0,136$; $\frac{7}{80} = 0,00875$; $\frac{372}{1250} = 0,2976$. Man kann die Sache auch so darstellen: $\frac{8}{25} = \frac{800}{2500} = \frac{32}{100} = 0,32$.

§. 49.

Ist ferner der Dividendus eine ganze Zahl, der Divisor aber ein Bruch, z. B. $14 : \frac{2}{7}$; so muß jede Einheit in der Zahl 14 zuerst in 7 Theile getheilt, und dann untersucht werden, wie oft 2 in der Anzahl dieser Theile enthalten ist. Es ist daher $14 : \frac{2}{7} = \frac{14 \times 7}{2} = 49$, d. h. der Bruch $\frac{2}{7}$ ist 49 mal in der Zahl 14 enthalten.

Hieraus geht hervor, daß eine ganze Zahl durch einen Bruch dividirt wird, wenn man sie durch den Nenner vervielfacht, und das Produkt durch den Zähler des Bruchs dividirt.

Ist aber der Bruch ein zehntheiliger, so vernachlässige man das Komma, und hänge der ganzen Zahl so viele Nullen an, als im Decimalbruche Decimalstellen sind; oder was das nämliche ist, man multiplicire die ganze Zahl und den Bruch durch seinen Nenner, und

verrichte dann die Division wie in ganzen Zahlen. So ist z. B. $5 : 0,025 = 5000 : 25 = 200$; $18326 : 0,476 = 18326000 : 476 = 38500$. Der Grund dieses Verfahrens beruht auf der Form, welche man dem Decimalbruche geben kann, nämlich $5 : 0,025 = 5 : \frac{25}{1000} = \frac{5 \times 1000}{25} = \frac{5000}{25}$.

§. 50.

Soll der Bruch $\frac{3}{4}$ durch $\frac{5}{9}$ dividirt werden, so muß der Divisor, als das angenommene Maafs, mit der zu messenden Gröfse $\frac{3}{4}$ gleichartig sein, d. h. beide Brüche müssen einerlei Nenner haben; folglich bringe man sie unter einerlei Benennung, und man hat

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{9} = \frac{27}{36} : \frac{20}{36},$$

und die Aufgabe verwandelt sich nun in die Frage, wie oft 20 sechs und dreisigste Theile in 27 gleichen Theilen enthalten sind, d. i.

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{9} = \frac{27}{20} = \frac{3 \times 9}{4 \times 5} = \frac{3}{4} \times \frac{9}{5},$$

wo der Faktor $\frac{9}{5}$ der umgekehrte Divisor ist.

Es wird also ein Bruch durch einen andern dividirt, wenn man mit dem umgekehrten Divisor den zu dividirenden Bruch nach §. 43 vervielfacht, d. h. den Zähler des Dividendus durch den Nenner des Divisors, und den Nenner des Dividendus durch den Zähler des Divisors).*

*) Diese Regel ist abermals auf folgende Weise darzustellen. $\frac{3}{4} : \frac{5}{9} \cdot 4^{-1} = \frac{3}{4} : 5 \cdot 9^{-1} = \frac{3}{4 \cdot 5 \cdot 9^{-1}} = \frac{3 \cdot 9}{4 \cdot 5}$; oder auch; $\frac{3}{4} : \frac{5}{9} = 3 \cdot 4^{-1} : 5 \cdot 9^{-1} = \frac{3 \cdot 4^{-1}}{5 \cdot 9^{-1}} = \frac{3 \cdot 9}{5 \cdot 4}$. Und im Allgemeinen lassen sich, für jeden Fall der Division mit Brüchen, diese unter einerlei Benennung bringen, und es entsteht dann die Frage, wie oft ist der Zähler des Divisors im Zähler des Dividendus enthalten; z. B. $42 : \frac{6}{7} = \frac{42 \times 7}{6} : \frac{6}{7} = \frac{42 \cdot 7}{6} = 49$.

Dieses Verfahren läßt sich auch noch auf folgende Weise rechtfertigen. Soll nämlich der Bruch $\frac{3}{4}$ durch $\frac{5}{9}$ dividirt werden, so vernachlässige man den Nenner 9, wodurch der Bruch neunmal größer wird, um ebensoviel muß also der Quotient aus

$$\frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{20}$$

zu klein sein, folglich wird, um dem Quotienten seinen wahren Werth zu geben, erfordert, daß der Bruch $\frac{3}{20}$ noch durch 9 vervielfacht werde; man erhält, wie vorhin,

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{9} = \frac{27}{20}.$$

Wären die Divisionsglieder gemischte Brüche, so verwandle man diese zuerst in unächte, und verrichte die Division nach der vorhin angegebenen Regel.

§. 51.

Ist ein Decimalbruch durch einen andern zehnteiligen Bruch zu dividiren, so gebe man beiden die Form gewöhnlicher Brüche, und behandle sie auf die vorige Weise. Ist $4,384 : 0,02$ gegeben, so hat man

$$\frac{4384}{1000} : \frac{2}{100} = \frac{4384}{20} = 219,2.$$

Man darf also nur in beiden Brüchen die Anzahl der Decimalstellen gleich machen, und dann, mit Weglassung des Kommas, den Zähler des ersten Bruches durch den Zähler des andern dividiren. Hier läßt sich abermals die Verwandlung des Quotienten in einen Decimalbruch in Ausübung bringen.

Die Division zweier Decimalbrüche läßt sich auch noch auf folgende Art verrichten. Man lasse nämlich im Divisor das Komma weg, wodurch der Bruch durch seinen Nenner vervielfacht wird, und multiplicire durch diesen Nenner den Zähler des Dividendus, welches geschieht, wenn man das Komma um so viele Ziffer nach der Rechten zu rückt, als Nullen im Nenner des Divisors sind, und dividire hierauf nach §. 49. Reichen die Ziffer im Dividendus nicht hin, um das Komma weit genug wegrücken zu können, so

ersetzt man die fehlenden Stellen durch Nullen. Das obige Beispiel wird nun so behandelt werden:

$$4,384 : 0,02 = 438,4 : 2 = 219,2;$$

ferner ist

$$4,5 : 0,00015 = 450000 : 15 = 30000.$$

§. 52.

Es verdient hier bemerkt zu werden, wie man aus einem gegebenen Decimalbruche den Urbruch wieder erhalten kann. Man setzt zu diesem Ende die Decimalziffer als Zähler, mit dem entsprechenden Nenner, und bringt den Bruch unter seine kleinste Benennung, indem man im Zähler und Nenner den gemeinschaftlichen Faktor unterdrückt. Man findet

$$0,125 = \frac{125}{1000} = \frac{1 \cdot 125}{8 \cdot 125} = \frac{1}{8};$$

$$0,0592 = \frac{592}{10000} = \frac{37 \cdot 16}{625 \cdot 16} = \frac{37}{625}.$$

(Ueber die Auffindung des gemeinschaftlichen Theilers vergl. §. 60.)

§. 53.

Ist hingegen ein periodischer Decimalbruch gegeben, und sein Urbruch soll aufgefunden werden, so sind zweierlei Fälle zu unterscheiden, ob nämlich die Periode mit der ersten Decimalstelle anfängt oder nicht.

Im ersten Falle nimmt man die Periode als Zähler eines gewöhnlichen Bruchs, dessen Nenner aus sovielen 9 besteht, als die Periode Ziffer enthält.

Im zweiten Falle rückt man den Strich bis zum Anfang der Periode, bringt dann diese nach dem vorhergehenden Falle unter die Form eines gewöhnlichen Bruchs; hiedurch erhält man Ganze mit einem angehängten Bruche, welche beide dividirt werden müssen durch den Nenner der Decimalziffer, welche der Periode vorangehen.

§. 54.

Die Richtigkeit beider Regeln läßt sich auf folgende Art darthun. Man suche erstlich den Urbruch

für $0,3333\dots$; es sei x der Werth der Periode, mithin $x = 0,3333\dots$; wird x durch die Potenz von 10 vervielfacht, welche durch die Anzahl der Decimalziffer der Periode angezeigt wird, so hat man

$$10x = 3,3333\dots = 3 + x;$$

zieht man auf beiden Seiten x ab, so ergibt sich $9x = 3$, und hieraus wiederum

$$x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Man suche ferner den Stammbruch des periodischen Decimalbruchs $0,285714285714\dots$; wird durch x der Werth der Periode angezeigt, so hat man

$$x = 0,285714\dots;$$

wird x durch $10^6 = 1000000$ vervielfacht, so ist

$$1000000x = 285714,285714\dots = 285714 + x,$$

und hieraus, wenn auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens x subtrahirt, und hierauf durch den übrigbleibenden Coëfficienten dividirt wird,

$$x = \frac{285714}{999999} = \frac{142857 \times 2}{142857 \times 7} = \frac{2}{7}.$$

Es sei nun der periodische Decimalbruch $0,583333\dots$ gegeben, und man soll den Urbruch desselben angeben. Wird $x = 0,58333\dots$ gesetzt, so ist

$$100x = 58,333\dots = 58 + 0,333\dots;$$

nun ist aber nach dem vorhergehenden

$$0,333\dots = \frac{3}{9} = \frac{1}{3},$$

folglich

$$100x = 58 + \frac{1}{3}.$$

woraus sich ergibt:

$$x = \frac{58}{100} + \frac{1}{300} = \frac{174 + 1}{300} = \frac{175}{300} = \frac{25 \cdot 7}{25 \cdot 12} = \frac{7}{12}.$$

Aus welchem gewöhnlichen Bruche entsteht der periodische Decimalbruch $0,361111\dots$? Hier hat man

$$100x = 36,111\dots = 36 + 0,111\dots = 36 + \frac{1}{9},$$

daher

$$x = \frac{36}{100} + \frac{1}{900} = \frac{324 + 1}{900} = \frac{25 \cdot 13}{25 \cdot 36} = \frac{13}{36}.$$

§. 55.

Ehe wir die Rechnung mit Brüchen verlassen, wollen wir nur noch anmerken, daß die Regeln,

welche durch Beispiele der natürlichen Zahlenreihe beleuchtet worden sind, unverändert bleiben, wenn die Brüche durch Buchstaben dargestellt werden.

Wie nun ein jeder gewöhnliche Bruch sich in einen Decimalbruch verwandeln läßt, so läßt sich auch ein Bruch $\frac{a}{x-b}$ in eine Reihe von Gliedern umformen, deren Summe immer dem Stammbruche $\frac{a}{x-b}$ gleich sein muß. Durch Division erhält man nach und nach:

$$\begin{aligned} \frac{a}{x-b} &= \frac{a}{x} + \frac{\frac{ab}{x}}{x-b}; \quad \frac{\frac{ab}{x}}{x-b} = \frac{ab}{x^2} + \frac{\frac{ab^2}{x^2}}{x-b}; \\ \frac{\frac{ab^2}{x^2}}{x-b} &= \frac{ab^2}{x^3} + \frac{\frac{ab^3}{x^3}}{x-b}; \dots \text{es ist also } \frac{a}{x-b} = \\ &= \frac{a}{x} + \frac{ab}{x^2} + \frac{ab^2}{x^3} + \frac{ab^3}{x^4} + \dots + \frac{\frac{ab^n}{x^n}}{x-b}, \end{aligned}$$

in welcher Entwicklung Zähler und Nenner der Theilbrüche nach einem leicht aufzufindenden Gesetze fortschreiten. Aus diesem Grunde vernachlässigen wir

den Rest $\frac{\frac{ab^n}{x^n}}{x-b}$, setzen $a = mb$, und wir erhalten:

$$\frac{mb}{x-b} = m \left\{ \frac{b}{x} + \frac{b^2}{x^2} + \frac{b^3}{x^3} + \dots \right\} \dots (1).$$

Diese Formel ist von sehr großem Nutzen, wenn man einen gegebenen Bruch in einen Decimalbruch verwandeln soll; man darf nur für x die Werthe 10, 100, 1000, ... schreiben, wenn b hinsichtlich x sehr klein sein wird. Der Bruch $\frac{56}{9993}$ soll in einen Decimalbruch verwandelt werden. Hier ist $56 = mb = 8 \times 7$, und $x - b = 10000 - 7$, also $\frac{56}{9993} = 8 \times$

$\times \frac{7}{10000 - 7}$; werden diese Werthe in die Formel (1) eingeführt, so hat man:

$$\frac{56}{9993} = 8 \{ 0,0007 + (0,0007)^2 + (0,0007)^3 + \dots \}.$$

Wollte man den Werth des Bruches mit 8 Decimalstellen genau genug haben, so sind schon die beiden ersten Glieder der vorhergehenden Reihe hinreichend; man hat: $(0,0007 + 0,00000049) \times 8 = 0,00560392$; will man diesen Werth noch genauer haben, so nehme man noch das dritte Glied $0,000000000343$, und vervielfache diesen Bruch durch 8, so hat man $0,000000002744$; dieses Produkt zu obigem Bruche addirt, giebt $0,005603922744$, woraus man sieht, daß das dritte Glied nichts mehr in der Gröfse der achten Decimalziffer des ersten Bruchs ändert.

Viertes Kapitel.

Vom grössten gemeinschaftlichen Divisor.

§. 56.

Alle Zahlen, welche durch 2 theilbar sind, heissen *grade*, alle übrigen *ungrade* Zahlen. Jede Zahl also, welche durch zwei dividirt wird, kann nur zum Reste 1 geben; hieraus erhellet, daß alle Zahlen, welche an der Stelle der Einheiten eine grade Zahl oder eine Null haben, durch zwei ohne Rest theilbar sein müssen.

Wir wollen nun untersuchen, in welchen Fällen erstlich eine Zahl, gröfser als 100, durch 4 theilbar ist. Da die Ziffer, welche den beiden letzten einer Zahl vorangehen, ein Vielfaches von 100 ausmachen,

und da der Faktor 100 ein Vielfaches von 4, also durch 4 theilbar ist, so hat man nur darauf zu sehen, ob die beiden letzten Ziffer, als Zahl betrachtet, durch 4 gemessen werden können; trifft dieses ein, so ist die ganze Zahl auch durch 4 messbar.

Man untersuche nun, ob 5372 durch 4 ohne Rest dividirt werden kann. Man hat

$$\frac{5372}{4} = \frac{5300 + 72}{4} = 53 \cdot 25 + 18 = 1348,$$

weil nämlich 72 durch 4 ohne Rest dividirt werden kann.

Ferner ist eine Zahl durch 8 messbar, wenn die drei letzten Ziffer derselben, als ganze Zahl genommen, durch 8 theilbar sind; denn die vorhergehenden Ziffer bilden ein Vielfaches von 1000, welcher Faktor durch 8, also auch jedes Vielfache desselben durch 8 theilbar ist.

Ob eine Zahl durch 5, 25, 125, und überhaupt durch die Potenzen von 5 theilbar ist, läßt sich immer aus der Theilbarkeit der letzten Ziffer durch genannte Potenzen erkennen.

§. 57.

Ob eine Zahl durch 3 oder 9 gemessen werden kann, läßt sich aus Folgendem entscheiden. Es seien nämlich $a, b, c, d \dots$ die Ziffer einer Zahl von der Linken an gerechnet; betrachten wir erst den Fall für den Divisor 9, hinsichtlich dessen folgende Quotienten Statt finden, nämlich:

$$\dots \cdot \frac{d}{9} = \frac{d}{9},$$

$$\frac{10}{9} = 1 + \frac{1}{9}, \text{ also } \frac{10c}{9} = c + \frac{c}{9},$$

$$\frac{100}{9} = 11 + \frac{1}{9}, \text{ » } \frac{100b}{9} = 11b + \frac{b}{9},$$

$$\frac{1000}{9} = 111 + \frac{1}{9}, \text{ » } \frac{1000a}{9} = 111a + \frac{a}{9};$$

werden die letztern Brüche addirt, so ist

$$\frac{1000a + 100b + 10c + d}{9} = 111a + 11b + c + \frac{a + b + c + d}{9};$$

woraus erhellet, daßs nur die Summe der Einheiten, welche in den Ziffern einer Zahl enthalten sind, durch 9 theilbar sein muß, wenn die ganze Zahl durch 9 theilbar sein soll. — Es läßt sich nun leicht beweisen, daßs alle Zahlen durch 3 theilbar sind, welche zur Summe der Einheiten ihrer Ziffer eine Zahl giebt, die durch 3 gemessen werden kann.

§. 58.

Jede Zahl ist durch 11 ohne Rest theilbar, wenn die Summe der Einheiten der Ziffer in ungraden Stellen, von der Rechten zur Linken gezählt, der Summe der Einheiten der Ziffer in graden Stellen in der nämlichen Ordnung, entweder gleich, oder doch wenigstens der Unterschied beider Summen ein Vielfaches von 11 ist.

Um dieß zu beweisen, seien $a, a', a'', \dots$ die Ziffer in ungraden Stellen von der Rechten nach der Linken, $b, b', b'', \dots$ die Ziffer auf graden Stellen; dadurch lassen sich nun folgende Gleichheiten bilden:

$$\begin{aligned} & \dots \dots \dots \frac{a}{11} = \frac{a}{11}, \\ \frac{10}{11} &= 1 - \frac{1}{11}, \text{ also } \frac{10b}{11} = b - \frac{b}{11}, \\ \frac{100}{11} &= 9 + \frac{1}{11}, \text{ » } \frac{100a'}{11} = 9a' + \frac{a'}{11}; \\ \frac{1000}{11} &= 91 - \frac{1}{11}, \text{ » } \frac{1000b'}{11} = 91b' - \frac{b'}{11}, \\ \frac{10000}{11} &= 909 + \frac{1}{11}, \text{ » } \frac{10000a''}{11} = 909a'' + \frac{a''}{11}; \\ \frac{100000}{11} &= 9091 - \frac{1}{11}, \text{ » } \frac{100000b''}{11} = 9091b'' - \frac{b''}{11}; \end{aligned}$$

wird nun addirt, so entsteht auf der linken Seite die

Zahl selbst, und auf der Rechten ihre Theile; ist N die gegebene Zahl, so hat man:

$$\frac{N}{11} = b + 9a' + 91b' + 909a'' + 9091b'' + \frac{(a + a' + a'') - (b + b' + b'')}{11};$$

woraus ersichtlich ist, daß entweder $(a + a' + a'') - (b + b' + b'') = 0$, oder ein Vielfaches von 11 sein muß, wenn die Zahl N durch 11 theilbar sein soll. — Es sei nun $N = 47564$, wo $a = 4$, $a' = 5$, $a'' = 4$, also $a + a' + a'' = 13$; ferner $b = 6$, $b' = 7$, und $b + b' = 13$, folglich $(a + a' + a'') - (b + b') = 13 - 13 = 0$, mithin 47564 durch 11 theilbar; der Quotient ist 4324.

§. 59.

Wollte man nun noch auf ähnliche Art die Theilbarkeit einer gegebenen Zahl hinsichtlich einer andern, welche 11 übersteigt, untersuchen, so würde dieses Geschäft sehr weitläufig werden; da überdies das angeführte Verfahren nur dienen soll, um zu untersuchen, ob zwei Zahlen, also auch die Glieder irgend eines Bruchs, einen gemeinschaftlichen Theiler haben; so glauben wir, um nicht weitläufig zu werden, es müsse nun von der Art und Weise gehandelt werden, wodurch man den gemeinschaftlichen Divisor irgend zweier Zahlen auffinden könne. Es seien 47029 und 56363 die gegebenen Zahlen: um ihren gemeinschaftlichen Theiler zu finden, verfährt man auf folgende Art:

Man dividire die größere Zahl durch die kleinere, man erhält zum Quotienten 1, und den Rest 9334, welchen Rest man als neuen Divisor, und den vorhergehenden Divisor als Dividendus betrachte; der Quotient aus dieser neuen Division ist 5, und der Rest 359, welcher abermals als Divisor, und der unmittelbar vorhergehende Divisor als Dividendus behandelt werden; der neue Quotient ist 26, ohne daß ein fernerer Rest übrig bleibt, und dieß ist ein Zei-

chen, daß der letzte Rest 359 der gemeinschaftliche Theiler beider obigen Zahlen ist.

§. 60.

Um zu beweisen, daß der letzte, auf die vorige Weise erhaltene Rest, der gemeinschaftliche Theiler der beiden Zahlen ist, müssen wir hier erinnern, daß vermöge des Begriffs der Division der Dividendus sich herstellen läßt, wenn man den Divisor durch den Quotienten vervielfacht, und zum Produkte den Rest der Division addirt; vermöge dieses Grundsatzes hat man:

$$\begin{aligned} 9334 &= 359 \cdot 26, \\ 47029 &= 9334 \cdot 5 + 359 = 359 \cdot 26 \cdot 5 + 359 \\ &= 359 (26 \cdot 5 + 1), \\ 56363 &= 47029 \cdot 1 + 9334 \\ &= 359 (26 \cdot 5 + 1) + 359 \cdot 26 \\ &= 359 (5 \cdot 26 + 26 + 1), \end{aligned}$$

folglich

$$\frac{47029}{56363} = \frac{359 (26 \cdot 5 + 1)}{359 (5 \cdot 26 + 26 + 1)} = \frac{131}{139}.$$

Aus dieser Formel läßt sich leicht erkennen, daß die Zahlen $26 \cdot 5 + 1$, und $5 \cdot 26 + 26 + 1$ keinen weitem Faktor gemein haben, und daß mithin 359 der größte gemeinschaftliche Divisor der gegebenen Zahlen ist.

Zur leichtern Uebersicht des Verfahrens mag folgendes Schema dienen:

56363		47029		9334		359	
Quotienten		1		5		26	;

die Einrichtung dieser kleinen Tafel kann ganz leicht begriffen werden.

Man suche den größten gemeinschaftlichen Theiler der Zahlen 161 und 437. Bedient man sich des vorigen Verfahrens, so ist

437		161		115		46		23	
Quotienten		2		1		2		2	,

woraus erhellet, daß 23 der gemeinschaftliche Theiler der gegebenen Zahlen ist.

§. 61.

Bleibt hingegen nach den angestellten Divisionen die Einheit als Rest, so ist diese ein Zeichen, daß die Zahlen keinen gemeinschaftlichen Theiler haben können, also Primzahlen unter sich sind. Denn es seien a und b die Zahlen, und $\frac{a}{b} = c + \frac{d}{b}$; $\frac{b}{d} = e + \frac{f}{d}$; $\frac{d}{f} = g + \frac{1}{f}$; hieraus ergeben sich folgende Werthe:

$$d = fg + 1,$$

$$b = ed + f,$$

$$a = bc + d;$$

schreibt man in a und b den Werth von d , so ergeben sich:

$$b = e(fg + 1) + f,$$

$$a = [e(fg + 1) + f]c + fg + 1,$$

welche Zahlen, wie aus diesen Formeln leicht zu erkennen ist, durchaus keinen gemeinschaftlichen Divisor haben.

Fünftes Kapitel.

Von den Kettenbrüchen.

§. 62.

Man dividire Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{43}{105}$ durch den Zähler 43, so ist

$$\frac{43}{105} = \frac{\frac{1}{105}}{\frac{43}{43}} = \frac{1}{2 + \frac{19}{43}};$$

verrichtet man dasselbe Geschäft in dem angehängten Bruche (*Ergänzungsbruch*) $\frac{19}{43}$, so erhält man

$$\frac{43}{105} = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{5}{19}}};$$

ferner dividire man den Zähler und Nenner des angehängten Bruchs $\frac{5}{19}$ durch den Zähler, so ergibt sich

$$\frac{43}{105} = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{4}{5}}}},$$

woraus endlich erhalten wird

$$\frac{43}{105} = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}}}}.$$

Ein Bruch, dessen Nenner immer eine ganze Zahl und ein Bruch ist, dessen Nenner abermals aus einer ganzen Zahl und einem Bruche besteht, dessen Nenner wiederum aus einer ganzen Zahl und einem Bruche zusammengesetzt ist, u. s. w., heisst ein *Kettenbruch* — *continuirlicher Bruch*. Wirft man nach und nach die Brüche in den Nennern, wie $\frac{19}{43}$, $\frac{5}{19}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{4}$ weg, so ergeben sich für den Urbruch zwar keine vollständigen Werthe, die sich aber dem wahren Werthe des Stammbruchs um so mehr nähern, je weiter sie vom Anfang entfernt sind; man heisst diese Werthe die *Näherungswerthe* des Urbruchs; die Ganzen in jedem Nenner sind die *Quotienten*; und wenn man noch den angehängten Bruch hinzuthut, so heisst der ganze Nenner der *vollständige Quotient*.

Sind die Glieder eines Bruchs begränzte Gröfsen, so ist die Anzahl der Quotienten ebenfalls begränzt, und in dem Falle hat man einen *endlichen Kettenbruch*; im entgegengesetzten Falle ist er *unendlich*.

Kehrt dieselbe Ordnung der Quotienten wieder, so hat man einen *periodischen Kettenbruch*, wie z. B.

$$\frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{a + \frac{1}{b + \dots}}}}$$

worin die Quotienten a, b die *Periode* bilden.

§. 63.

Um nun das Gesetz zu erforschen, nach welchem die Näherungswerthe des Bruchs $\frac{43}{105}$ fortschreiten, vernachlässige man für jeden solchen Werth den im Nenner angehängten Bruch, wodurch man nach und nach erhält:

1. den Werth $\frac{1}{2}$, mithin die Einheit zum ersten Zähler, und den ersten Quotienten zum ersten Nenner.

2. Nun werfe man den Bruch $\frac{5}{19}$ weg, so bleibt noch $\frac{1}{2 + \frac{1}{2}}$, statt des Nenners 2 hat man also $2 + \frac{1}{2}$; führt man diesen Werth für den Nenner 2 ein, so

geht $\frac{1}{2}$ über in $\frac{1}{\frac{2 \cdot 2 + 1}{2}} = \frac{2}{2 \cdot 2 + 1} = \frac{2}{5}$, wo der

zweite Zähler 2 dem zweiten Quotienten, der Nenner $2 \cdot 2 + 1$ aber dem unmittelbar vorhergehenden Nenner durch den zweiten Quotienten vervielfacht, und zum Produkte die Einheit addirt, gleich ist.

3. Wirft man ferner den Bruch $\frac{4}{3}$ weg, und schreibt überall im vorigen Werthe $2 + \frac{1}{3}$ für den zweiten Quotienten 2, so ergibt sich:

$$\frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}} = \frac{2 + \frac{1}{3}}{2(2 + \frac{1}{3}) + 1} = \frac{2 \cdot 3 + 1}{(2 \cdot 2 + 1)3 + 2} = \frac{7}{17};$$

für den dritten Quotienten 3 ergibt sich also der Zähler des Näherungswerthes, indem man den Zähler des unmittelbar vorhergehenden Näherungswerthes

durch den dritten Quotienten vervielfacht, und zu diesem Produkte den Zähler des vorletzten Näherungswerthes addirt. Der Nenner dieses Näherungswerthes wird auf ähnliche Art erhalten, es wird nämlich der Nenner $2 \cdot 2 + 1$ des dem dritten Quotienten unmittelbar vorhergehenden Näherungswerthes durch diesen Quotienten 3 vervielfacht, und zum Produkte der Nenner des vorletzten Näherungswerthes gezählt.

4. Schreibt man nun $3 + \frac{1}{1}$ für den Quotienten 3, so ist

$$\frac{2(3 + \frac{1}{1}) + 1}{(2 \cdot 2 + 1)(3 + \frac{1}{1}) + 2} = \frac{(2 \cdot 3 + 1) \times 1 + 2}{[(2 \cdot 2 + 1)3 + 2] \times 1 + 2 \cdot 2 + 1} = \frac{9}{22};$$

der Zähler dieses Bruchs ist der vierte Quotient 1 durch den vorhergehenden Zähler $2 \cdot 3 + 1$ vervielfacht, und hiezu der Zähler 2 des vorletzten Näherungswerthes addirt; der Nenner ist auf dieselbe Weise aus den Nennern der vorhergehenden Näherungswerthe und dem entsprechenden Quotienten zusammengesetzt.

5. Wird endlich statt des Quotienten 1 der Bruch $1 + \frac{1}{4}$ eingeführt, so geht der vorige Bruch in folgenden über:

$$\begin{aligned} & \frac{(2 \cdot 3 + 1)(1 + \frac{1}{4}) + 2}{[(2 \cdot 2 + 1)3 + 2](1 + \frac{1}{4}) + 2 \cdot 2 + 1} = \\ & = \frac{2 \cdot 3 + 1 + 2}{[(2 \cdot 2 + 1)3 + 2]4 + (2 \cdot 2 + 1)3 + 2} = \\ & = \frac{9 \times 4 + 7}{22 \times 4 + 17} = \frac{43}{103}, \end{aligned}$$

woraus zugleich erhellet, daß der Näherungswerth, welcher dem letzten Quotienten entspricht, der gegebene Urbruch ist.

§. 64.

Die Verwandlung eines Bruches in einen Kettenbruch, und die Auffindung der den verschiedenen Quotienten entsprechenden Näherungswerthe lassen sich unter folgende Regeln bringen:

1. Man suche nach der Methode des grössten gemeinschaftlichen Theilers (§. 59) die Quotienten.

2. Als Zähler des ersten Näherungswerthes setze man die Einheit, und gebe ihr den ersten Quotienten zum Nenner.

3. Der Zähler des zweiten Näherungswerthes ist der zweite Quotient, sein Nenner aber der zweite Quotient durch den vorhergehenden Nenner vervielfacht, und dazu 1 addirt.

4. Der dritte und jeder folgende Näherungswerth wird gebildet, wenn man die Glieder des dem Quotienten vorhergehenden Näherungsbruchs durch den Quotienten vervielfacht, und zu den respektiven Produkten die Glieder des vorletzten Näherungsbruchs addirt.

Dieses ganze Verfahren ist in dem folgenden Schema enthalten, in welchem die Bildung der Näherungswerthe des Bruchs $\frac{43}{105}$ dargestellt ist. Für den Bruch $\frac{43}{105}$ hat man:

Quotienten	2	2	3	1	4
Zähler	1	2	7	9	43
Nenner	2	5	17	22	105

In der obersten Reihe befinden sich die Quotienten, in der mittlern die Zähler, und in der letzten die Nenner der Näherungsbrüche.

§. 65.

Soll ein unächter Bruch in einen Kettenbruch verwandelt werden, so ziehe man aus demselben erst die Ganzen und betrachte diese Zahl als den ersten Quotienten; der übrigbleibende ächte Bruch werde alsdann nach §. 59 behandelt. Was nun die Bildung der Näherungswerthe anbelangt, so gelten alle Regeln, welche vorhin über die Bildung der Nenner der Näherungswerthe gegeben worden sind, nun für die Bildung der Zähler; und was über die Zähler gesagt wurde, wird nun auf die Nenner angewandt.

Um dieß durch ein Beispiel zu erläutern, verwandle man $\frac{105}{43}$ in einen Kettenbruch, man er-

hält die Quotienten 2, 2, 3, 1, 4, und die Näherungswerthe:

Quotienten	2	2	3	1	4
Zähler	2	5	17	22	105
Nenner	1	2	7	9	43.

Decimalbrüche bilden hier keine Ausnahme, man schreibt den zugehörigen Nenner, und verfährt, wie bei gewöhnlichen Brüchen. Man verwandle $4,137 = \frac{4137}{1000}$ in einen Kettenbruch; die Quotienten sind 4, 7, 3, 2, 1, 13, aus welchen folgende Näherungsbrüche gebildet werden:

Quotienten	4	7	3	2	1	13
Zähler	4	29	91	211	302	4137
Nenner	1	7	22	51	73	1000.

§. 66.

Nachdem wir nun im Stande sind, einen jeden Bruch in einen Kettenbruch zu verwandeln, und dessen Näherungswerthe zu bilden, müssen wir uns nun noch die Frage vorlegen, in welcher Beziehung die Näherungswerthe zum Urbruche stehen? Um diese Frage genügend zu beantworten, setzen wir x für einen unächten Bruch, und $a, b, c, d, \dots$ für die Quotienten, so ist

$$x = a + \text{einem Bruche,}$$

folglich $x > \frac{a}{1}$, d. h. der erste Näherungswerth ist kleiner, als der Stammbruch; da aber der Nenner b des zweiten Näherungswerths $a + \frac{1}{b} = \frac{ab + 1}{b}$ zu klein ist, denn es fehlt noch der ganze Rest des Kettenbruchs, so ist $x < \frac{ab + 1}{b}$, d. h. für einen unächten Bruch ist der zweite Näherungswerth grösser als der Urbruch.

Der dritte Näherungswerth

$$\frac{(ab + 1)c + a}{bc + 1} = \frac{abc + c + a}{bc + 1},$$

dessen Nenner aus $b + \frac{1}{c}$ entstanden ist, muß kleiner als der Urbruch sein, weil zu b ein Bruch $\frac{1}{c}$ gezählt wird, der, wegen des zu kleinen Nenners c , zu groß ist, mithin ist auch $b + \frac{1}{c}$ zu groß, und folglich obiger Bruch kleiner als x .

Aus demselben Grunde ist der Ausdruck

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}}} \text{ zu groß: denn es ist } \frac{1}{d} \text{ zu}$$

groß wegen des zu kleinen Nenners d ; mithin $\frac{1}{c + \frac{1}{d}}$

zu klein, also der Bruch $b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}}$ wegen des zu kleinen Nenners zu groß; folglich der ganze Theil $a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}}}$ größer als x ; u. s. f.

Bei der Bildung der Näherungswerthe eines Kettenbruchs haben wir zu bemerken Gelegenheit gehabt, daß die Näherungswerthe für einen unächtten Bruch die umgekehrten Näherungsbrüche eines ächten Bruchs sind (§§. 64, 65); folglich müßten die so eben gemachten Bemerkungen über das Verhältniß der Näherungswerthe zum unächtten Urbruche umgekehrt auch auf ächte Urbrüche anwendbar sein. Um jedoch hier und in verschiedenen folgenden Stellen unsere Regeln kürzer fassen und sie gleichförmiger ausdrü-

cken zu können; setzen wir für einen ächten Bruch $a = 0$, und so ist der erste Näherungswerth $\frac{0}{1} < x$. Wird nun dieser Bruch immer als der erste in der Reihe der Näherungswerthe eines ächten Bruchs gedacht, so gilt hinsichtlich des Verhältnisses der Näherungsbrüche zum Stammbruche folgendes allgemeine Gesetz:

Die Näherungswerthe eines jeden Kettenbruchs sind kleiner, als der Urbruch, wenn sie auf ungraden Stellen stehen; ist aber ihr Rang durch eine grade Zahl bezeichnet, so sind sie gröfser, als der Urbruch.

§. 67.

Der Unterschied zweier unmittelbar aufeinanderfolgenden Näherungswerthe ist immer $= \pm 1$ dividirt durch das Produkt der Nenner der Näherungsbrüche. Um dies zu beweisen, seien $a, b, c, d, \dots$ die Quotienten, also die Näherungswerthe:

$$\frac{a}{1}, \frac{ab+1}{b}, \frac{abc+c+a}{bc+1}, \frac{abcd+ab+ac+cd+1}{bcd+d+b};$$

folglich

$$\frac{a}{1} - \frac{ab+1}{b} = \frac{ab - ab - 1}{b} = \frac{-1}{b};$$

$$\begin{aligned} \frac{ab+1}{b} - \frac{abc+c+a}{bc+1} &= \frac{ab^2c+bc+ab+1-ab^2c-b-ab}{b(bc+1)} \\ &= \frac{+1}{b(bc+1)}; \end{aligned}$$

$$\frac{abc+c+a}{bc+1} - \frac{abcd+ab+ac+cd+1}{bcd+d+b} = \frac{-1}{(bc+1)(bcd+d+b)}.$$

Sind daher allgemein $\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}$ zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Näherungsbrüche, so ist

$$\frac{pq' - p'q}{qq'} = \frac{\pm 1}{qq'},$$

also auch, wenn die Nenner vernachlässigt werden, $pq' - p'q = \pm 1 \dots (1).$

Hieraus erhellet, *dafs die Einheit negativ ist, wenn die Näherungswerthe auf graden Stellen abgezogen wer-*

den; sie ist aber mit dem Zeichen $+$ behaftet, wenn die abzuziehenden Brüche auf ungraden Stellen stehen. Man nehme die Näherungsbrüche $\frac{7}{17}$ und $\frac{9}{22}$ aus §. 64, so ist, wenn hier der Bruch $\frac{0}{1}$ beigelegt wird, $\frac{7}{17} - \frac{9}{22} =$
 $= \frac{154 - 153}{374} = \frac{+1}{374}$. Hingegen $\frac{9}{22} - \frac{7}{17} =$
 $= \frac{153 - 154}{374} = \frac{-1}{374}$.

§. 68.

Es bezeichne x den Urbruch; $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$, $\frac{p''}{q''}$ drei unmittelbar aufeinanderfolgende Näherungswerthe da nun immer ein Näherungswerth kleiner, und der auf diesen folgende gröfser als der Urbruch ist (§. 66); so liegt der Urbruch immer zwischen zwei solchen Näherungsbrüchen; allein, der Unterschied des Urbruchs und eines Näherungswerthes ist immer kleiner, als der Unterschied der beiden Näherungswerthe selbst; es mufs also sein

$$\frac{p'}{q'} - x < \pm \frac{1}{q'q''},$$

nun ist aber, wenn m' der dem Bruche $\frac{p''}{q''}$ entsprechende Quotient ist, $q'' = m'q' + q$, also $q'' > q'$; wird nun ± 1 durch diese Werthe dividirt, so hat man

$$\frac{\pm 1}{q''} = \frac{\pm 1}{q'm' + q} < \frac{\pm 1}{q'};$$

wird nun noch durch q' dividirt, so ist

$$\frac{\pm 1}{q'q''} < \frac{\pm 1}{q'q'};$$

da aber $\frac{\pm 1}{q'q''}$ gröfser ist als $\frac{p'}{q'} - x$, so mufs es um so mehr auch $\frac{\pm 1}{q'q'}$ sein, d. i.

$$\frac{p'}{q'} - x < \pm \frac{1}{q'q'},$$

d. h. der Unterschied zwischen einem Näherungswerthe und dem Urbruche ist immer kleiner, als $+$ oder $-$ die

Einheit, dividirt durch das Quadrat des Nenners des Näherungswerthes.

§. 69.

Zwischen zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden Näherungswerthen $\frac{p'}{q'}$ und $\frac{p''}{q''}$ giebt es keinen Zwischenwerth $\frac{\pi}{\varphi}$ mehr, dessen Zähler $\pi < p''$, und $> p'$, dessen Nenner $\varphi < q''$ und $> q'$ ist, und der von jedem Näherungswerthe weniger als die Näherungswerthe unter sich verschieden wäre. Hier hat man

$$\frac{p'}{q'} - \frac{\pi}{\varphi} = \frac{p'\varphi - q'\pi}{q'\varphi};$$

nun ist aber der Zähler $p'\varphi - q'\pi$ entweder $= \pm 1$, oder größer als ± 1 , d. h.

$$\frac{p'\varphi - q'\pi}{q'\varphi} = \frac{\pm 1}{q'\varphi};$$

weil nun $\varphi < p''$ angenommen wurde, so muß sein

$$\frac{\pm 1}{q'\varphi} > \frac{\pm 1}{q'q''},$$

d. h. der Unterschied, zwischen $\frac{p'}{q'}$ und $\frac{\pi}{\varphi}$ ist größer,

als der Unterschied zwischen $\frac{p'}{q'}$ und $\frac{p''}{q''}$, folglich kann $\frac{\pi}{\varphi}$ kein Bruch sein, welcher zwischen zwei

Näherungswerthen unter den oben gegebenen Bedingungen läge.

§. 70.

Wenn je zwei Näherungswerthe entweder auf graden, oder auf ungraden Stellen von derselben Art genannt werden, so lassen sich immer $m - 1$ Brüche von der nämlichen Art einschalten, wo m eine ganze Zahl durch das Produkt der Nenner dividirt den Un-

terschied der zwei Näherungswerthe derselben Art anzeigt.

Sind $\frac{p}{q}$ und $\frac{p''}{q''}$ zwei Brüche von solcher Art, so sind die einzuschaltenden Brüche

$$\frac{p}{q}, \frac{p+p'}{q+q'}, \frac{p+2p'}{q+2q'}, \frac{p+3p'}{q+3q'}, \dots, \frac{p+m'p'}{q+m'q'},$$

wo m' den Quotienten für $\frac{p''}{q''}$ bedeutet; ist dieser Quotient 1, so ist keine Einschaltung möglich. Alle diese Brüche nähern sich dem Bruche $\frac{p''}{q''}$; denn

man nehme den n^{ten} eingeschalteten Bruch $\frac{p+np'}{q+nq'}$, so ist der nachfolgende

$$\frac{p+np'+p'}{q+nq'+q'},$$

folglich

$$\frac{p+np'}{q+nq'} - \frac{p+np'+p'}{q+nq'+q'} = \frac{pq' - p'q}{(q+nq')(q+(n+1)q')} = \frac{\pm 1}{(q+nq')(q+(n+1)q')};$$

da die Nenner dieser Unterschiede immer größer werden, so müssen, weil 1 unverändert bleibt, auch die Differenzen abnehmen, mithin die eingeschalteten Brüche dem Werthe $\frac{p''}{q''}$ immer näher kommen, und aus diesem Grunde sich dem Urbruche nähern.

§. 71.

Da $\frac{p''}{q''} = \frac{p+m'p'}{q+m'q'}$, so ist der ihm vorangehende Nebenbruch (eingeschaltete)

$$\frac{p+(m'-1)p'}{q+(m'-1)q'} = \frac{p+m'p'-p'}{q+m'q'-q'} = \frac{p''-p'}{q''-q'},$$

der diesem vorhergehende Bruch

$$\frac{p+(m'-2)p'}{q+(m'-2)q'} = \frac{p''-2p'}{q''-2q'} = \frac{(p''-p')-p'}{(q''-q')-q'};$$

fernere Werthe, welche eingeschaltet werden können:

$$\frac{p + (m' - 3) p'}{q + (m' - 3) q'} = \frac{((p'' - p') - p') - p'}{((q'' - q') - q') - q'}$$

·
·
·
·
·

Nehmen wir nun die Näherungswerthe $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{17}$, $\frac{9}{22}$, $\frac{43}{105}$ aus §. 64, so läßt sich zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{3}$ der Nebenbruch $\frac{2-1}{5-2} = \frac{1}{3}$ einschalten; zwischen $\frac{2}{3}$ und

$\frac{7}{17}$ sind Nebenbrüche: $\frac{7-2}{17-5} = \frac{5}{12}$; $\frac{5-2}{12-5} =$

$\frac{3}{7}$; zwischen $\frac{9}{22}$ und $\frac{7}{17}$ giebt es keinen Bruch, dessen Nenner größer als 17 und kleiner als 22 wäre. Die Ursache, daß hier die Einschaltung unmöglich ist, liegt in dem zu $\frac{9}{22}$ gehörigen Quotienten 1. — Zwi-

schen $\frac{43}{105}$ und $\frac{9}{22}$ liegen $\frac{43-9}{105-22} = \frac{34}{83}$; $\frac{34-9}{83-22} =$

$\frac{25}{61}$; $\frac{25-9}{61-22} = \frac{16}{39}$. Die Reihe der Brüche, wel-

che sich dem Urbruche $\frac{43}{105}$ nähern, ist daher: $\frac{1}{2}$; ($\frac{1}{3}$); $\frac{2}{3}$; ($\frac{3}{7}$); ($\frac{5}{12}$); $\frac{7}{17}$; $\frac{9}{22}$; ($\frac{16}{39}$); ($\frac{25}{61}$); ($\frac{34}{83}$); wo die eingeschalteten Brüche durch Klammern angezeigt sind.



Sechstes Kapitel.

Die Ausziehung der Wurzeln.

§. 72.

Nachdem durch Division, mittelst eines bekannten Faktors, der andere Faktor aufgefunden wurde, läßt sich nun die Frage aufwerfen: Wenn Potenzen gegeben sind, wie kann die Grundgröfse gefunden werden? Dieses Geschäft, mittelst dessen man zur Grundgröfse der Potenzen zurückkehrt, wird *Ausziehung der Wurzel* genannt; das Geschäft selbst wird durch das einer Potenz vorgesetzte Zeichen $\sqrt{}$ (d. i. radix) angedeutet.

Wird ein Ausdruck als das Quadrat einer Grundgröfse, welche gefunden werden soll, angesehen; so wird das Verfahren die *Ausziehung der Quadratwurzel* genannt. Hieraus läßt sich nun leicht einsehen, was es heiße, die *Cubikwurzel* ausziehen.

Sobald eine höhere, als die Quadratwurzel ausgezogen werden soll, so schreibt man zwischen die Schenkel des Wurzelzeichens $\sqrt{}$ die Zahlen 3, 4, 5 . . . , so daß also $\sqrt[3]{a}$ die Cubikwurzel aus a bedeutet; die Zahlen 3, 4, 5, . . . heißen *Wurzelexponenten*.

Erste Abtheilung.

Ausziehung der Quadratwurzel.

§. 73.

Bei der Ausziehung der Quadratwurzel aus den Zahlen des dekadischen Systems leisten die Quadrate der einfachen Einheiten und der ersten Glieder der Perioden großen Vorschub; sie folgen deswegen

hier, und im Verfolg wird immer darauf hingewiesen werden:

Wurzeln	1	2	3	4	5	6	7	8	9.
Quadrate	1	4	9	16	25	36	49	64	81.

Aus dieser Tafel erkennt man leicht, *dass die Quadrate aus den ganzen einfachen Einheiten der natürlichen Zahlen höchstens aus zwei Ziffern bestehen können; denn $10^2 = 100$. Umgekehrt also besteht die ganze Wurzel der Zahlen von 1 bis 99 nur aus einer einzigen Ziffer.*

§. 74.

Aus folgender Tafel ergeben sich die Wurzeln und Quadrate des ersten Gliedes einer jeden Periode, nämlich:

Wurzeln.

1, 10, 100, 1000, 10000, 100000 . . .

Quadrate.

1, 100, 10000, 1000000, 100000000, 10000000000.

Setzt man hiezu noch die Wurzeln und Quadrate des letzten Gliedes einer jeden Periode, nämlich:

$$9^2 = 81$$

$$(99)^2 = 9801$$

$$(999)^2 = 988001$$

$$(9999)^2 = 98880001$$

$$(99999)^2 = 9888800001;$$

so lässt sich leicht daraus urtheilen, *dass die Quadratwurzel einer jeden gegebenen Zahl aus so vielen Ziffern besteht, als Abtheilungen (Klassen) zu zwei Ziffern von der Rechten nach der Linken zu in der gegebenen Zahl sich finden; die erste Klasse auf der linken Seite kann auch nur aus einer einzigen Ziffer bestehen. Denn aus der Betrachtung der obigen Wurzeln und der ihnen entsprechenden Quadrate ergiebt sich, dass jeder Null, um welche die Wurzel rechts wächst, im Quadrate, nach derselben Seite zu, zwei Nullen entsprechen; es muss dies also auch für jede andere Ziffer Statt haben.*

§. 75.

Ist eine zweiziffrige Zahl gegeben, und es soll ihr Quadrat gefunden werden; so bezeichne man durch a die Rangordnung der Dekade, und durch b die einfachen Einheiten; die Zahl selbst wird also sein $10a + b$; ihr Quadrat, nach §. 23:

$$(10a + b)^2 = 100a^2 + 2 \cdot 10ab + b^2.$$

Wäre $10a + b = 56$, so ist $a = 5$, und $b = 6$; mithin, wenn diese Werthe in die vorige Formel eingeführt werden:

$$(56)^2 = (50 + 6)^2 = (50)^2 + 2 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 6 + 6^2; \\ = 2500 + 600 + 36 = 3136.$$

Soll das Quadrat von 328 gebildet werden, so setze man $32 = a$, $8 = b$, und es ist

$$(328)^2 = (10 \cdot 32)^2 + 2 \cdot 10 \cdot 32 \cdot 8 + 8^2;$$

nun ist aber

$$(320)^2 = 32^2 \times 100 = [30^2 + 2 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 2 + 2^2] 100 \\ = 1024 \times 100 = 102400; \\ \begin{array}{rcl} 2 \cdot 10 \cdot 32 \cdot 8 & = & 5120 \\ 8^2 & = & 64 \end{array}$$

folglich

$$(328)^2 = 107584.$$

Auf die nämliche Weise findet man

$$(4375)^2 = (4370 + 5)^2 = 100 \cdot (437)^2 + 2 \cdot 10 \cdot 437 \cdot 5 + 25;$$

nun ist aber

$$\begin{aligned} 100 \cdot (437)^2 &= (430 + 7)^2 \times 100 = (100 \times 43^2 + \\ &\quad + 2 \cdot 10 \cdot 43 \cdot 7 + 49) 100, \\ 100 \cdot (43)^2 &= 100 (40 + 3)^2 = \\ &= 100 (100 \cdot 4^2 + 2 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 3 + 9) = 184900, \end{aligned}$$

also

$$100 \cdot (437)^2 = 100 (184900 + 6020 + 49) = 19096900;$$

und endlich

$$(4375)^2 = 19096900 + 43700 + 25 = 19140625.$$

Hätte man die Wurzel 4375 durch sich selbst vielfacht, so wäre man allerdings früher zum Ziele gekommen; allein dieses Verfahren giebt uns einigermaßen den Schlüssel zur Auflösung unserer Aufgabe, der Ausziehung der Quadratwurzel.

§. 76.

In dem vorhergehenden Beispiele war 1849 das Quadrat der beiden ersten Ziffer 43 der ganzen Wurzel 4375. Betrachtet man nun umgekehrt diese Wurzel 43 als unbekannt, so muß sie durch $10a + b$ dargestellt werden, weil nämlich 1849 zwei Klassen 18 und 49 zu zwei Ziffern von der Rechten zur Linken enthält. Es muß daher sein:

$$1849 = 100a^2 + 2 \cdot 10ab + b^2;$$

oder auch

$$1800 + 49 = 100a^2 + 2 \cdot 10ab + b^2;$$

da $100a^2$ das Quadrat der Dekade ist, so kann dieß nur in $1800 = 100 \cdot 18$ enthalten sein. Man vereinige nun die mit 100 vervielfachten Glieder, so ist

$$100(18 - a^2) + 49 = 2 \cdot 100b + b^2;$$

nun bestimme man a so, daß a^2 nicht größer als 18, aber auch nicht kleiner als das in 18 enthaltene größte Quadrat sei; nach §. 73 ist 16 das in der ersten Klasse 18 enthaltene höchste Quadrat, dessen Wurzel $4 = a$ ist. Die Zahl 4 wird nun als der erste Theil der Wurzel betrachtet; durch den Werth $a = 4$, und $a^2 = 16$ reducirt sich obige Formel, nach geschehener Subtraktion, nämlich $18 - 16 = 2$, und man hat $200 + 49 = 2 \cdot 10 \cdot 4 \cdot b + b^2 = 240 + 9 = 24 \times 10 + 9$; werden nun wiederum die Glieder des Faktors 10 auf eine Seite des Gleichheitszeichens gebracht, indem nämlich $2 \cdot 10 \cdot 4 \cdot b$ auf beiden Seiten abgezogen wird, so bleibt

$$10(24 - 2 \cdot 4 \cdot b) + 9 = b^2,$$

worin b so zu nehmen ist, daß der Ueberschuß nicht negativ werde. Man dividire daher die Zahl 24, den Rest nämlich von der ersten Klasse, und die erste Ziffer der zweiten, durch $2 \cdot 4 = 2a$, d. i. durch die doppelte schon gefundene Wurzel, wodurch man zum Quotienten die Zahl 3, als den zweiten Theil der Wurzel, erhält; führt man diese Zahl anstatt b ein, so erhält man

$$(24 - 24) + 9 = 9,$$

so dafs also kein Rest mehr bleibt, welches beweist, dafs

$$\sqrt{1849} = 10 \cdot 4 + 3 = 40 + 3 = 43 = a'.$$

Gehen wir nun einen Schritt weiter vorwärts, und bestimmen die Wurzel von

$$(437)^2 = 100 \times 43^2 + 2 \cdot 10 \cdot 43 \cdot 7 + 49$$

$$= 190964 = (10a' + b')^2$$

$$= 100 \times 1849 + 2 \cdot 10 \cdot 43b' + b'^2;$$

zieht man $184900 = 100 \cdot (43)^2$ von 190964 ab, so bleibt

$$6069 = 6060 + 9 = 606 \cdot 10 + 9 = 2 \cdot 10 \cdot 43b' + b'^2;$$

vereinigt man die Glieder, welche durch 10 vervielfacht sind, so ist

$$10(606 - 2 \cdot 43 \cdot b') + 9 = b'^2;$$

hier dividire man abermals 606 durch $2 \cdot 43 = 86 = 2a'$; der grösste darin enthaltene Quotient ist $7 = b' =$ dem dritten Theile der Wurzel; durch diesen Werth von b' hat man

$$606 - 86 \cdot 7 = 606 - 602 = 4,$$

und noch

$$10 \times 4 + 9 = 49 = 7^2 = b'^2.$$

Setzt man nun $437 = a''$, und b'' für die Einheiten; so ist

$$19140625 = 100a''^2 + 2 \cdot 10 \cdot a'' \cdot b'' + b''^2$$

$$= 100 \cdot (437)^2 + 2 \cdot 10 \cdot 437 \cdot b'' + b''^2$$

$$= 19096900 + 2 \cdot 10 \cdot 437 \cdot b'' + b''^2,$$

und nach Abzug der Zahl $19096900 = (4370)^2$, bleibt noch

$$43725 = 2 \cdot 10 \cdot 437 \cdot b'' + b''^2$$

woraus man zur Bestimmung von b'' erhält:

$$10(4372 - 2 \cdot 437 \cdot b'') + 5 = b''^2;$$

man dividire 4372 durch $2 \cdot 437 = 874$, wodurch man zum Quotienten $5 = b''$ gelangt, und die Ziffer 5 ist zugleich die vierte der Wurzel; schreibt man wirklich 5 statt b'' , so ist

$$10(4372 - 4370) + 5 = 25,$$

oder

$$20 + 5 = 25;$$

es ist daher $\sqrt{19140625} = 4375$.

§. 77.

Das vorhergehende Verfahren läßt sich kurz auf folgende wenigen Regeln beschränken:

1. Man theile die gegebene Zahl von der Rechten zur Linken in Klassen von zwei Ziffern, welche man durch ein dazwischengesetztes Komma anzeigt; dadurch weiß man zugleich, aus wievielen Ziffern die ganze Wurzel bestehen muß, aus soviel Ziffern nämlich, als Klassen vorhanden sind.

2. Aus der vordersten Klasse bestimme man mit Hilfe der Tafel in §. 73 jene Wurzel, deren Quadrat der ersten Klasse entweder gleich ist, oder wenigstens ihr am nächsten kömmt; diese Ziffer ist die erste der ganzen Wurzel, deren Quadrat nun von der ersten Klasse abgezogen werde.

3. Zu dem Reste rechts setze man die erste Ziffer der folgenden Klasse, und dividire diese Zahl durch das Doppelte der schon gefundenen Wurzel; der daraus erhaltene Quotient ist der folgende Theil der Wurzel. Hier muß man sich jedoch hüten, den Quotienten zu hoch oder zu gering zu nehmen.

4. Den vorhin gefundenen Quotienten multiplicire man durch den Divisor, und subtrahire dieses Produkt vom Dividendus.

5. Zum Reste schreibe man nach der rechten Seite zu die letzte Ziffer der nämlichen Klasse, und ziehe von dieser Klasse das Quadrat des in Nr. 3 gefundenen Quotienten ab.

Bleibt kein Rest, und findet sich in der gegebenen Zahl weiter keine Klasse mehr, so sind die in 2. und 3. gefundenen Ziffer die gesuchte Wurzel.

6. Bleibt hingegen ein Rest und es finden sich noch Klassen in der gegebenen Zahl, so verfährt man mit jeder Klasse nach Nr. 3., 4. und 5.

Es kann sich aber ereignen, daß der in Nr. 2. gebildete Divisor größer ist, als der Dividendus; in diesem Falle schreibt man in die Wurzel eine Null, und nach dem Dividendus die letzte Ziffer der nämlichen, und die erste Ziffer der darauffolgenden Klasse, und fährt auf die eben angegebene Weise fort.

§. 78.

Beispiele.

$$1) \sqrt{54,76} \quad \left| \begin{array}{l} 74 \\ 1. \text{ Divisor} = 2 \times 7 = 14. \end{array} \right.$$

$$49 = a^2$$

$$57$$

$$56 = 2ab$$

$$»16$$

$$16 = b^2$$

$$»»$$

$$2) \sqrt{22,46,76} \quad \left| \begin{array}{l} 474 \\ 1. D = 2 \cdot 4 = 8 \\ 2. D = 2 \cdot 47 = 94. \end{array} \right.$$

$$16 = 4^2$$

$$64$$

$$56 = 2 \cdot 4 \cdot 7$$

$$86$$

$$49 = 7^2$$

$$377$$

$$376 = 2 \cdot 47 \cdot 4$$

$$16$$

$$16 = 4^2$$

$$»»$$

$$3) \sqrt{4,16,16} \quad \left| \begin{array}{l} 204 \\ 1. D = 2 \cdot 2 = 4 \\ 2. D = 2 \cdot 20 = 40. \end{array} \right.$$

$$4$$

$$»161$$

$$160$$

$$16$$

$$16$$

$$»»$$

$$\begin{array}{r}
 4) \sqrt{29,84,43,69} \quad \left| \begin{array}{l} 5463 \\ 1. D = 10 \\ 2. D = 108 \\ 3. D = 1092 \end{array} \right. \\
 \hline
 25 \\
 \hline
 48 \\
 \hline
 40 \\
 \hline
 84 \\
 \hline
 16 \\
 \hline
 684 \\
 \hline
 648 \\
 \hline
 363 \\
 \hline
 36 \\
 \hline
 3276 \\
 \hline
 3276 \\
 \hline
 \text{v} \gg \gg 9 \\
 \hline
 9 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 5) \sqrt{61,37,31,22,81} \quad \left| \begin{array}{l} 78341 \\ 1. D = 14 \\ 2. D = 156 \\ 3. D = 1566 \\ 4. D = 15668 \end{array} \right. \\
 \hline
 49 \\
 \hline
 123 \\
 \hline
 112 \\
 \hline
 117 \\
 \hline
 64 \\
 \hline
 533 \\
 \hline
 468 \\
 \hline
 651 \\
 \hline
 9 \\
 \hline
 6422 \\
 \hline
 6264 \\
 \hline
 1582 \\
 \hline
 16 \\
 \hline
 15668 \\
 \hline
 15668 \\
 \hline
 \text{v} \gg \gg \gg 1 \\
 \hline
 1 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

6) Welche Zahl ist es, deren Hälfte durch ihren dritten Theil vervielfacht, das Produkt 864 giebt?

Wäre x diese Zahl, so ist ihre Hälfte $= \frac{x}{2}$,
und ihr dritter Theil $= \frac{x}{3}$, das Produkt dieser Brüche

$\frac{x}{2} \times \frac{x}{3}$ muß der Zahl 864 gleich sein; man hat daher vermöge der Multiplikation der Brüche (§. 43.)

$$\frac{x}{2} \times \frac{x}{3} = \frac{x^2}{6} = 864;$$

befände sich bloß x^2 auf einer Seite des Gleichheitszeichens, so dürfte man nur auf beiden Seiten die Quadratwurzeln ausziehen, welche wegen der Gleichheit der Quadratzahlen ebenfalls gleich sein müssen, weil keine zwei gleichen Quadrate aus ungleichen Wurzeln denkbar sind. Da nun auf der einen Seite

$\frac{x^2}{6}$ sich findet, so läßt sich der Nenner 6 dadurch aufheben, daß man den Bruch $\frac{x^2}{6}$ durch 6 verviel-

facht (§. 40); weil aber dadurch das Quadrat $\frac{x^2}{6}$ sechsmal grösser wird, so muß auch 864 sechsmal grösser gemacht, d. h. 864 muß durch sechs vervielfacht werden; man hat daher

$$x^2 = 6 \times 864 = 5184,$$

und daraus

$$x = \sqrt{5184} = 72.$$

Zur Uebung folgen hier noch andere Beispiele, deren Auflösung allein von der Ausziehung der Quadratwurzel abhängt.

7) Welche Zahl ist es, deren achter Theil durch ihren siebenten Theil vervielfacht, und dieses Produkt durch 3 dividirt, zum Quotienten die Zahl $298\frac{2}{3}$ giebt?

8) Man soll eine Zahl von der Beschaffenheit finden, daß das Produkt aus der Summe der Zahl selbst und 94 in die Differenz von 94 und der gesuchten Zahl gleich sei der Zahl 8512.

9) Eine solche Zahl zu finden, daß, wenn zu ihr 8 addirt, und auch 8 subtrahirt wird, das Produkt aus der Summe in die Differenz der Zahl 4032 gleich ist.

10) Man soll zwei Zahlen finden, deren Quotient 11, und deren Produkt 3971 ist. Nennt man hier den Divisor x , so ist die andere Zahl oder der Dividendus $11x$, das Produkt $11x \times x = 11x^2 = 3971$.

§. 79.

Diejenigen Zahlen, aus welchen man ohne Rest die Quadratwurzel ziehen kann, heißen *Rationalzahlen*; bleibt aber nach Vollendung des Geschäfts ein Rest, so ist dieß ein Zeichen, daß diese Zahl kein vollständiges Quadrat ist; aus diesem Grunde heißen alle dergleichen Zahlen *Irrationalzahlen*.

Sollte es sich aber ereignen, daß man aus einer mit dem Zeichen — behafteten GröÙe die Quadratwurzel auszuziehen hätte, so läßt sich dieses Geschäft bloß anzeigen, und ein solcher Ausdruck heißt eine *imaginäre GröÙe*, weil sie nämlich kein Quadrat sein kann, indem das Quadrat einer jeden GröÙe positiv sein muß (§. 21); es ist daher $\sqrt{-a^2}$ eine imaginäre GröÙe.

Die zuletzt gemachte Bemerkung, daß nämlich jedes Quadrat positiv ist, es mag von einer positiven oder negativen GröÙe herrühren, rechtfertigt den Gebrauch, einer jeden Quadratwurzel das Zeichen + und — vorzusetzen; jede Quadratwurzel wird also durch $\pm \sqrt{}$ dargestellt.

§. 80.

Soll aus einem Decimalbruche die Quadratwurzel gezogen werden, so ist zuerst zu bemerken, daß das

Quadrat des Nenners eines Decimalbruchs immer eine grade Anzahl Nullen enthält; denn es ist $10 \times 10 = 10^2 = 100$; $100^2 = 10000$; u. s. w. Ein quadrirter Decimalbruch muß also immer eine paare Anzahl Decimalstellen enthalten. Ist dieß der Fall, so wird aus dem Bruche die Wurzel wie aus einer ganzen Zahl gezogen, in dieser Wurzel aber schneidet man von der rechten nach der linken Seite zu soviele Decimalstellen ab, als die Hälfte derselben im gegebenen Bruche anzeigt. Hätte man z. B. aus $67,108864$ die Quadratwurzel zu ziehen, so setze man

$$\sqrt{67108864} = 8192,$$

und in dieser Wurzel nehme man von hinten nach vornen zu 3 Decimalziffer, weil derer 6 im Quadrate sind, und man hat

$$\sqrt{67,108864} = 8,192.$$

§. 81.

Ist hingegen die Anzahl der Decimalen ungrade, so läßt sie sich, unbeschadet dem Werthe des Bruchs, dadurch grade machen, daß eine Null nach den Decimalziffern gesetzt wird; so hat man $\sqrt{2,704} = \sqrt{2,7040}$. Es läßt sich aber leicht aus der angehängten Null abnehmen, daß der Bruch $2,7040$ kein Quadrat eines endlichen Decimalbruchs sein kann; denn die eine angehängte Null kann nie aus der Multiplikation eines Decimalbruchs durch sich selbst entstanden sein, sonst müßten am Ende zwei Nullen stehen. Es kann aber der gegebene Bruch als das Quadrat eines unendlichen Decimalbruchs betrachtet werden, in welchem alle auf die Ziffer 4 folgenden Decimalen vernachlässigt und die Stellen durch eine gewisse Anzahl Nullen ausgefüllt worden sind. Man hat daher auch $\sqrt{2,704} = \sqrt{2,7040000000 \dots}$, aus welchem Bruche nun nach dem vorhergeh. §. die Wurzel ausgezogen wird, mit der Bemerkung, daß nach der Wurzel aus den Ganzen 2 ein Komma gesetzt werden muß. Hier folgt das Verfahren selbst:

$\sqrt{2,70,40,00,00,00}$	1,6443
1	1. D = 2
17	2. D = 32
12	3. D = 328
50	4. D = 3288
36	
144	
128	
160	
16	
1440	
1312	
1280	
16	
12640	
9864	
27760	
9	
27751	

Hier hat man $(1,64)^2 = 2,6896$; allein für $(1,644)^2 = 2,702736$, welches Quadrat bis zur dritten Decimalstelle richtig ist; $(1,6443)^2 = 2,70339 \dots$

Es wird kaum zu bemerken nöthig sein, daß man die Nullen nach und nach hinter einen jeden Rest schreiben kann. Eine solche Wurzel ist durch *Näherung* bestimmt.

§. 82.

Wird nun die Wurzel aus einer Zahl verlangt, welche kein vollkommenes Quadrat ist, welches schon daraus zu erkennen ist, ob die Zahl auf zwei Nullen, oder auf die Ziffer 1, 4, 5, 6, 9 sich endigt; so läßt sich die Wurzel ebenfalls durch Näherung finden. Machen wir nun den Versuch mit der Zahl 5; es werden nämlich hinter dem Komma, welches nach der Zahl 5 zu schreiben ist, so viele Paare Nullen gesetzt, als man in der Wurzel Decimalstellen zu haben wünscht. Bestimmen wir nun die Wurzel bis auf 5 Decimalziffer:

$\mathcal{V}$ 5,00,00,00,00,00	2,23606
<u>4</u>	1. D = 4
10	2. D = 44
<u>8</u>	3. D = 446
20	4. D = 4472
<u>4</u>	5. D = 44720
160	
<u>132</u>	
280	
<u>9</u>	
2710	
<u>2676</u>	
340	
<u>36</u>	
304000	
<u>268320</u>	
356800	
<u>36</u>	
356764	

Auch hier lassen sich die Nullen füglich nach jedem Reste setzen, wie dieß aus folgendem Beispiele erhellet:

$\mathcal{V}$ 18,42	42,918
<u>16</u>	1. D = 8
24	2. D = 84
<u>16</u>	3. D = 858
82	4. D = 8582
<u>4</u>	
780	
<u>756</u>	
240	
<u>81</u>	
1590	
<u>858</u>	
7320	
<u>1</u>	
73190	
<u>68656</u>	
45340	
<u>64</u>	
45276	

§. 83.

Weil das Quadrat eines jeden Bruchs gebildet wird, wenn man sowohl den Zähler als auch den Nenner einzeln zum Quadrat erhebt, denn es ist

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9}; \text{ so muß umgekehrt die}$$

Quadratwurzel eines Bruchs gleich sein der Quadratwurzel des Zählers dividirt durch die Quadratwurzel aus dem Nenner. Es ist daher

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}; \quad \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}} = \frac{5}{6}.$$

Hier ist jedoch zu bemerken, daß ein Bruch, aus welchem die Quadratwurzel gezogen werden soll, auf seine kleinste Benennung gebracht sein muß; denn es ist $\frac{5}{7} \times \frac{5}{7} = \frac{25}{49} = \frac{50}{98}$.

Sind die Glieder eines Bruchs Irrationalzahlen, so ziehe man aus jeder durch Näherung die Wurzel zu einer gleichen Anzahl Decimalstellen, wie z. B.

$$\sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{1,732}{2,236} = \frac{1732}{2236} = 0,7745\dots, \text{ wenn nämlich der}$$

Bruch $\frac{1732}{2236}$ nach §. 48 in einen Decimalbruch verwandelt wird.

Zu demselben Resultate kann man übrigens auch dadurch gelangen, daß man den gegebenen Bruch zuerst in einen Decimalbruch mit grader Anzahl Decimalstellen verwandelt, und hierauf aus diesem Bruche nach §. 81 die Quadratwurzel zieht. Für den vorliegenden Fall erhält man

$$\sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{0,6} = 0,7745\dots$$

§. 84.

1. Weil das Quadrat einer jeden Potenz a^m erhalten wird, wenn man ihren Exponenten verdoppelt (denn es ist $a^m \times a^m = a^{m+m} = a^{2m} = (a^m)^2$), so muß auch umgekehrt die Quadratwurzel aus einer Potenz gefunden werden, wenn man den Exponenten der Potenz halbiert. Man hat daher

$$\sqrt{a^n} = a^{\frac{n}{2}};$$

setzt man $n = 1$, so verwandelt sich der vorige Ausdruck in folgenden:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}.$$

2. Kömmt nun eine Gröfse mit einem gebrochenen Exponenten vor, dessen Nenner zwei ist, so läfst sich diese Gröfse auch so darstellen, dafs man ihr das Quadratwurzelzeichen vorsetzt, und den Nenner des gebrochenen Exponenten vernachlässigt; z. B.

$$a^{\frac{3}{2}} = \sqrt{a^3}.$$

3. Nach diesen Vorbemerkungen läfst sich die Quadratwurzel aus jedem Produkte ziehen, indem man die Exponenten der Faktoren halbiert. Es ist daher:

$$\sqrt{a^6 b^4 c^{10}} = a^{\frac{6}{2}} b^{\frac{4}{2}} c^{\frac{10}{2}} = a^3 b^2 c^5;$$

denn wird letzteres Produkt zum Quadrate erhoben, so ergiebt sich der gegebene Ausdruck.

4. Bisweilen läfst sich aber die Quadratwurzel nicht aus allen Faktoren eines Produkts ziehen; in diesem Falle setzt man vor das Wurzelzeichen die Wurzeln der Faktoren, welche Quadrate sind, und läfst die übrigen unter dem Wurzelzeichen. So hat man z. B.

$$\sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = 2\sqrt{6}; \quad \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 9} = 3\sqrt{2};$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3}} = \frac{1}{3}\sqrt{6}.$$

$$\text{Denn es ist } \sqrt{4 \cdot 6} = 2^{\frac{2}{2}} \cdot 6^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 6^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{6}.$$

5. Will man aber die Faktoren vor dem Wurzelzeichen wiederum unter dasselbe bringen, so müssen ihre Quadrate genommen werden. Man hat also

$$4a\sqrt{6} = \sqrt{16 \cdot a^2 \times 6} = \sqrt{96 a^2}.$$

6. Jede Gröfse, welche das Quadratwurzelzeichen vor sich hat, wird durch Aufhebung des Wurzelzeichens zum Quadrate erhoben, mithin hat man

$$(\sqrt{a})^2 = (a^{\frac{1}{2}})^2 = a^{\frac{2}{2}} = a.$$

Haben daher umgekehrt mehrere Faktoren eines Produkts das Quadratwurzelzeichen vor sich, so braucht

dies nur einmal gesetzt und unter dasselbe alle Faktoren geschrieben zu werden. So ist

$$\sqrt{a} \sqrt{b} = a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} = (ab)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{ab}.$$

Soll aber eine Quadratwurzel durch eine andere dividirt werden, so will dies soviel sagen, als man soll aus einem Bruche die Quadratwurzel ziehen; so z. B.

$$\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

§. 85.

Will man aus einer mehrtheiligen allgemeinen Gröfse die Quadratwurzel ziehen, so ordnet man dieselbe nach den Potenzen eines gemeinschaftlichen Buchstabens (da wo dieser nicht vorhanden ist, läßt er sich durch $a^0 = 1$ ersetzen), und verfähre hierauf ganz nach §. 77, wie aus folgenden Beispielen erhellen wird.

$$\begin{array}{r|l} 1) \sqrt{9a^2b^2 + 36ab^2d + 36b^2d^2} & \begin{array}{l} \text{Wurzel} \\ 3ab + 6bd \\ \hline 1. D = 2 \cdot 3ab = 6ab; \end{array} \\ \underline{9a^2b^2} & \\ & + 36ab^2d + 36b^2d^2 \\ & \underline{36ab^2d} \\ & & + 36b^2d^2 \\ & & \underline{36b^2d^2} \\ & & & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2) \sqrt{\frac{9}{25}a^2 + \frac{12}{15}ac + \frac{4}{9}c^2} & \begin{array}{l} \frac{3}{5}a + \frac{2}{3}c \\ \hline 1. D. = \frac{6}{5}a; \end{array} \\ \underline{\frac{9}{25}a^2} & \\ & + \frac{12}{15}ac + \frac{4}{9}c^2 \\ & \underline{\frac{12}{15}ac + \frac{4}{9}c^2} \\ & & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 3) \mathcal{V} [9z^2 - 6zy + 12zx + y^2 - 4yx + 4x^2] \left| \begin{array}{l} 3z - y + 2x \\ 1. D = 6z; \\ 2. D = 6z - 2y; \end{array} \right. \\
 \underline{9z^2} \\
 -6zy + y^2 \\
 -6zy + y^2 \\
 + \quad - \\
 \hline
 +12zx - 4yx + 4x^2 \\
 +12zx - 4yx + 4x^2 \\
 - \quad + \quad - \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Zweite Abtheilung.

Ausziehung der Cubikwurzel.

§. 86.

Aus einer Zahl die Cubikwurzel ziehen heisst: denjenigen Faktor finden, welcher durch sein Quadrat vervielfacht zum Produkte die gegebene Zahl giebt. Auch hier gewähren die Cubikzahlen der einfachen Einheiten grossen Vorthail; man bilde sie daher, indem die Quadrate in §. 73 noch durch ihre Wurzeln vervielfacht werden. Man erhält:

Wurzeln	1	2	3	4	5	6	7	8	9.
Cubikzahlen	1	8	27	64	125	216	343	512	729.

Hieraus erhellet, dass die Cubikzahlen der einfachen Einheiten zwischen 1 und 1000 liegen; und dass also umgekehrt die Cubikwurzel einer zwischen 1 und 1000 liegenden Zahl, nur aus einer Ziffer, als ganze Zahl, bestehen kann.

§. 87.

Bestimmen wir nun noch die Cuben eines jeden ersten Gliedes der Perioden der dekadischen Zahlenreihe, um zu erkennen, aus wieviel Theilen die Wurzel einer jeden Cubikzahl bestehen muss.

Wurzeln.

1; 10; 100; 1000; 10000;

Cubikzahlen.

1; 1000; 1000000; 1000000000; 10000000000000;

Im allgemeinen schreibe man für jede Null in der Wurzel drei Nullen im Cubus; woraus zugleich ersichtlich ist, daß jeder Ziffer, um welche eine Wurzel nach der Rechten zu vermehrt wird, im Cubus ebenfalls rechts drei Ziffer entsprechen werden.

Hieraus leiten wir nun mit Recht diesen Grundsatz ab, *daß die Cubikwurzel einer jeden Zahl aus sovielen Ziffern bestehen muß, als Klassen zu drei Ziffern von der Rechten zur Linken in der gegebenen Zahl sich finden; die vorderste Klasse kann auch zwei, oder gar nur eine Ziffer enthalten.*

§. 88.

Man nehme nun, um der Sache näher zu kommen, die Wurzel $83 = 80 + 3 = 10 \cdot 8 + 3 = 10a + b$; es ist vermöge §. 21, Nr. 3, wenn dort $10a$ für a geschrieben wird:

$(10a + b)^3 = 1000a^3 + 3 \cdot 100a^2b + 3 \cdot 10ab^2 + b^3$; wird nun $a = 8$, $b = 3$ gesetzt, so erhält man folgende Theilprodukte:

$$\begin{array}{rcl} 1000a^3 & = & 1000 \times 8^3 = 512000 \\ 3 \cdot 100a^2b & = & 3 \cdot 100 \times 8^2 \cdot 3 = 57600 \\ 3 \cdot 10ab^2 & = & 3 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 3^2 = 2160 \\ b^3 & = & 3^3 = 27 \end{array}$$

folglich $83^3 = 571787$.

Will man also aus dieser Zahl die Cubikwurzel ziehen, so muß die Zahl selbst in die obigen Partialbrüche zerlegt werden.

Wird der Cubus der Zahl 834 verlangt, so setze man $834 = 830 + 4 = 83 \cdot 10 + 4$; wesswegen man hat:

$$\begin{aligned} (834)^3 &= (10 \cdot 83 + 4)^3 \\ &= 1000 \cdot 83^3 + 3 \cdot 100 \cdot 83^2 \cdot 4 + 3 \cdot 10 \cdot 83 \cdot 4^2 + 4^3 \\ &= 571787000 + 8266800 + 39840 + 64 \\ &= 580093704. \end{aligned}$$

Wollte man hier die Cubikwurzel ausziehen, so müßte man vorerst die Wurzel von 571787000 , d. h. für die beiden ersten Klassen der Cubikzahl, und

hierauf die übrigen Partialprodukte nach und nach abziehen.

§. 89.

Gehen wir nun wirklich zur Ausziehung der Cubikwurzel über, und machen mit der Zahl 571787 den Anfang. Setzen wir die Wurzel als unbekannt voraus, so muß sie unter der Formel $10a + b$ enthalten sein, daher:

$$571787 = 1000a^3 + 3 \cdot 100a^2b + 3 \cdot 10ab^2 + b^3;$$

nun ist aber auch

$571787 = 571000 + 787 = 1000 \times 571 + 787$,
also, wenn die Glieder durch 1000 vervielfacht auf eine Seite des Gleichheitszeichens gebracht werden,
 $1000(571 - a^3) + 787 = 3 \cdot 100a^2b + 3 \cdot 10ab^2 + b^3$.
Die Gröfse a werde nun mit Hilfe der Tafel in §. 86 so bestimmt, daß ihr Cubus der Zahl 571 am nächsten kömmt; für diesen Fall ist $a = 8$, und $a^3 = 512$, die Zahl 8 ist folglich die erste Ziffer der Wurzel. Wird nun $a^3 = 8^3 = 512$ von der ersten Klasse 571 abgezogen, so bleibt 59000, folglich

$$59700 + 87 = 3 \cdot 100 \times 64b + 3 \cdot 80b^2 + b^3;$$

hieraus ergibt sich

$100(597 - 3 \times 64b) + 87 = 3 \cdot 80b^2 + b^3$;
hier werde nun b so genomman, daß das ganze Glied einen positiven Werth erhalte, welches dadurch bewirkt wird, wenn 597 durch $3 \times 64 = 192$ dividirt wird, der Quotient $3 = b$ ist der zweite Theil der Wurzel; wird dieser Werth für b in die vorige Gleichheit eingeführt, so ergeben sich auf beiden Seiten die nämlichen Zahlen, es ist mithin

$$\sqrt[3]{571787} = 83.$$

Wollte man nun aus 580093704 die Cubikwurzel ziehen, so müßte man zuerst, nach obiger Formel, das Glied $1000 \cdot 571787 = (10a)^3$ abziehen, d. h. ohne auf die letzte Klasse 704 Rücksicht zu nehmen, die Cubikwurzel nach dem Verfahren des vorigen Beispiels aus den beiden ersten Klassen ziehen, diese Wurzel hierauf als den ersten Theil der zu suchenden Wur-

zel betrachten, und das für die zweite Ziffer der Wurzel angestellte Verfahren wiederholen, welches so oft geschehen muß, als Klassen vorhanden sind.

§. 90.

Die allgemeinen Regeln, auf welche die Ausziehung der Cubikwurzel sich gründet, sind mit Berücksichtigung des vorhergehenden Verfahrens folgende:

1. Nachdem man die gegebene Zahl von der Rechten zur Linken in Klassen zu drei Ziffern abgetheilt hat, sucht man in der Tafel §. 86 den Cubus, welcher der ersten Klasse am nächsten kömmt, dessen Wurzel der erste Theil der ganzen gesuchten Wurzel ist; dieser Cubus werde nun von der ersten Klasse abgezogen.

2. Zu dem Reste setze man die erste Ziffer der folgenden Klasse, und dividire diese Zahl durch das dreifache Quadrat der schon gefundenen Wurzel; der Quotient, der jedoch nicht zu hoch genommen werden darf, ist der zweite Theil der gesuchten Wurzel, dessen Produkt in den Divisor vom Dividendus abgezogen werde.

3. Zum Reste der vorhergehenden Subtraktion setze man die zweite Ziffer der nämlichen Klasse, und subtrahire von dieser Zahl das dreifache Quadrat des eben gefundenen Theils der Wurzel vervielfacht durch den vorhergehenden Theil der Wurzel.

4. Nach dem Reste aus dieser Subtraktion schreibe man die letzte Ziffer der nämlichen Klasse, und ziehe von dieser Zahl den Cubus des letzten Theils der Wurzel ab.

Bleibt kein Rest mehr, und ist auch weiter keine Klasse vorhanden, so ist die gefundene Zahl die gesuchte Wurzel. Ist hingegen nach Vollendung des vorherigen Geschäfts noch eine Klasse vorhanden, so gilt die gefundene Wurzel für den ersten Theil, und der zweite wird nach 2. gefunden, und damit das Verfahren von 3. und 4. in Ausübung gebracht.

§. 91.

Beispiele.

$$\begin{array}{r|l}
 1) \sqrt[3]{91,125} & \begin{array}{l} 45 \\ \hline 1. D = 3 \cdot 4^2 = 48 \end{array} \\
 \underline{64 = a^3} & \\
 271 & \\
 \underline{240 = 3 a^2 b} & \\
 312 & \\
 \underline{300 = 3 ab^2} & \\
 125 & \\
 \underline{125 = b^3} & \\
 0 &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 2) \sqrt[3]{438,976} & \begin{array}{l} 76 \\ \hline 1. D = 3 \cdot 7^2 = 147 \end{array} \\
 \underline{343} & \\
 959 & \\
 \underline{882} & \\
 777 & \\
 \underline{756 = 3 ab^2} & \\
 216 & \\
 \underline{216} & \\
 0 &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 3) \sqrt[3]{48,228,544} & \begin{array}{l} 364 \\ \hline 1. D = 3 \cdot 3^2 = 27 \\ 2. D = 3 \cdot 36^2 = 3888 \end{array} \\
 \underline{27} & \\
 212 & \\
 \underline{162} & \\
 502 & \\
 \underline{324 = 3 \cdot 3 \cdot 6^2} & \\
 1788 & \\
 \underline{216} & \\
 15725 & \\
 \underline{15552} & \\
 1734 & \\
 \underline{1728 = 3 \cdot 36 \cdot 4^2} & \\
 64 & \\
 \underline{64} & \\
 0 &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 4) \sqrt[3]{249,095,649,088} & 6292 \\
 \hline
 216 & 1. D = 3 \cdot 6^2 = 108 \\
 \hline
 330 & 2. D = 3 \cdot 62^2 = 11532 \\
 \hline
 216 & 3. D = 3 \cdot 629^2 = 1186923 \\
 \hline
 1149 & \\
 72 = 3 \cdot 6 \cdot 2^2 & \\
 \hline
 10775 & \\
 8 & \\
 \hline
 107676 & \\
 103788 & \\
 \hline
 38884 & \\
 15066 = 3 \cdot 62 \cdot 9^2 & \\
 \hline
 238189 & \\
 729 & \\
 \hline
 2374600 & \\
 2373846 & \\
 \hline
 7548 & \\
 7548 = 3 \cdot 629 \cdot 2^2 & \\
 \hline
 8 & \\
 8 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

§. 92.

Wird die Cubikwurzel aus einem Decimalbruche verlangt, so ist zuerst darauf zu sehen, ob die Anzahl der Decimalziffer durch 3 theilbar ist, oder nicht. Findet ersteres Statt, so zieht man aus den Ganzen zuerst, wie in den vorigen Beispielen, die Cubikwurzel, schreibt hinter diese ein Komma, und betrachtet, bei Wiederholung des Geschäftes für das Wurzelausziehen, die Decimalziffer als neue Klassen.

Ist aber die Anzahl der Decimalen durch kein Vielfaches von 3 gegeben, so hänge man so viele Nullen an, um ein solches Vielfache zu erzeugen, in welchem Falle aber vermöge §. 87 sich die Wurzel einer solchen Zahl nicht genau angeben läßt; man nähert sich aber derselben um so mehr, je mehr Klassen zu

drei Nullen dem Bruche angehängt werden (vergl. §. 81). Man hat also

$$\sqrt[3]{41,063625} = 3,45;$$

$$\sqrt[3]{0,095711845} = 0,457 \dots,$$

welcher letztere Bruch die Wurzel noch genauer ausdrückt, wenn man dem Decimalbruche unter dem Wurzelzeichen drei und drei Nullen anhängt.

§. 93.

Vermittelst des Vorhergehenden läßt sich nun die Cubikwurzel aus einer jeden Zahl, die kein vollständiger Cubus ist, durch Näherung bestimmen, indem nach geschehener Wurzelausziehung aus der ganzen Zahl hinter derselben Klassen von drei Nullen gedacht, und die daraus erhaltenen Wurzeltheile als Decimalziffer betrachtet werden. Hiernach hat man

$$\sqrt[3]{37} = \sqrt[3]{37,000000000 \dots} = 3,332221 \dots$$

§. 94.

Hat man letztlich aus einem Bruche die Cubikwurzel zu ziehen, so muß dieselbe sowohl aus dem Zähler, als auch aus dem Nenner gezogen werden. Sind die Theile des Bruches keine Cubikzahlen, so bestimmt man die Wurzel eines jeden durch Näherung bis zu einer gleichen Anzahl Decimalen, und hebt dann die gleichen Nenner der Decimalbrüche auf.

Man gelangt indess zu dem nämlichen Ziele, wenn man den Bruch erst in einen zehntheiligen verwandelt, in welchem die Anzahl der Decimalen ein Vielfaches von 3 ist, und hieraus nach §. 92 die Wurzel zieht; dieses Verfahren ist das kürzere. Man hat daher:

$$\sqrt[3]{\frac{1728}{39304}} = \frac{\sqrt[3]{1728}}{\sqrt[3]{39304}} = \frac{12}{34};$$

$$\sqrt[3]{\frac{450}{504}} = \frac{7,663 \dots}{7,958 \dots} = \frac{7663 \dots}{7958 \dots} = 0,96 \dots;$$

nun ist aber auch $\sqrt[3]{\frac{450}{4}} = 0,892857\dots$,
folglich

$$\sqrt[3]{\frac{450}{4}} = \sqrt[3]{0,892857\dots} = 0,96\dots,$$

wie vorhin.

§. 95.

Die Bemerkungen, welche über die Erhebung einer Grösse zum Quadrate und die Ausziehung der Quadratwurzel aus allgemeinen Grössen und aus Produkten im §. 84 gemacht worden sind, lassen sich auch auf die Erhebung einer Grösse auf irgend eine Potenz und auf die Ausziehung der cubischen und jeder andern Wurzel ausdehnen, und zwar:

1. Eine jede Grösse wird auf irgend eine Potenz erhoben, wenn der Exponent der Grösse durch die Potenzzahl vervielfacht wird; es ist mithin

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Aus irgend einer Grösse wird daher jede Wurzel gezogen, wenn der Exponent der Grösse unter dem Wurzelzeichen durch den Wurzelexponenten dividirt wird; es ist also

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}.$$

Umgekehrt wird jede Grösse mit einem gebrochenen Exponenten in eine Wurzelgrösse verwandelt, wenn der Grösse das Wurzelzeichen mit dem Nenner als Wurzelexponent vorgesetzt wird; es ist daher

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}.$$

2. Aus einem Produkte läßt sich jede Wurzel ziehen, wenn der Exponent eines jeden Faktors durch den Wurzelexponenten dividirt wird, folglich

$$\sqrt[5]{\frac{a^{10} b^{15} c^{20}}{3_2 d^5 f^{30} g^{25}}} = \frac{a^2 b^3 c^4}{2 d f^6 g^5}.$$

Kann dieselbe Wurzel nur aus einem oder nur aus einigen Faktoren gezogen werden, so pflegt das Produkt ihrer Wurzeln vor das Wurzelzeichen ge-

setzt, und die übrigen Faktoren unter dem Wurzelzeichen belassen zu werden; z. B.

$$\sqrt[4]{\frac{162}{1875}} = \sqrt[4]{\frac{81 \cdot 2}{625 \cdot 3}} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}};$$

$$\sqrt[3]{(5a^3c - 30a^2bc + 60ab^2c - 40b^3c)} = (a - 2c) \sqrt[3]{5c}.$$

Das Umgekehrte muß also auch Statt finden, wenn nämlich vor einem Wurzelzeichen Faktoren stehen, so lassen sich diese unter das Wurzelzeichen dadurch bringen, daß sie zur Potenz des Wurzelexponenten erhoben und als Faktoren nach der Wurzelgröße geschrieben werden; es ist also

$$a \sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{a^m} \cdot a = \sqrt[m]{a^{m+1}}.$$

3. Oft geschieht es, daß Wurzelgrößen unter sich vervielfacht, oder dividirt werden sollen. Sind die Wurzelexponenten gleich, so schreibt man das Wurzelzeichen mit seinem Exponenten nur einmal, und nach demselben alle Wurzelgrößen als Faktoren; z. B.

$$\sqrt[6]{3} \times \sqrt[6]{72} = \sqrt[6]{3 \cdot 72} = \sqrt[6]{6^3} = \sqrt[2]{6}.$$

Sind hingegen die Wurzelexponenten ungleich, so müssen sie dadurch unter gleiche Benennung gebracht werden, daß man einen jeden Wurzelexponenten und die Exponenten der Wurzelgröße durch das Produkt aller übrigen Wurzelexponenten vervielfacht, und im übrigen nach dem vorigen verfährt; als z. B.

$$\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[mn]{a^n} \times \sqrt[mn]{b^m} = \sqrt[mn]{a^n b^m};$$

$$\sqrt[2]{2} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{2^3} \times \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 5^2};$$

$$\sqrt[5]{4} \times \sqrt[10]{3} \times \sqrt[15]{6} = \sqrt[30]{4^6 \cdot 3^3 \cdot 6^2} = \sqrt[30]{3981312}.$$

4. Sind bei der Multiplikation mehrtheiliger Faktoren auch Glieder, welche Wurzelgrößen sind, so gelten für Theilprodukte die eben gegebenen Regeln; es ist also

$$(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5}) = 9 - 5 = 4;$$

$$(1 + 8\sqrt{7})(3 - 5\sqrt{7}) = 19\sqrt{7} - 277.$$

Siebentes Kapitel.

Von Verhältnissen und Proportionen.

§. 96.

Unter *Verhältniss* versteht man jede Vergleichung zweier Gröfsen, um zu erforschen, um wieviel entweder die eine gröfser ist als die andere — *arithmetisches Verhältniss* —; oder wie oft eine in der andern Gröfse enthalten ist — *geometrisches Verhältniss* —. Die unter sich verglichenen Gröfsen werden *Glieder*; das Resultat der angestellten Vergleichung der Name des Verhältnisses genannt, und zwar beim arithmetischen Verhältnisse *Differenz*, beim geometrischen *Exponent*. So ist 8 zu 3, in Zeichen $8 \div 3$, im arithmetischen Verhältnisse, dessen Differenz 5 durch diese Vergleichungsart gefunden wird; hingegen ist 8 zu 4, in Zeichen $8 : 4$, im geometrischen Verhältnisse, dessen Exponent 2.

Kann eine Gröfse durch eine andere vollkommen gemessen werden, so sind die Gröfsen in einem *rationalen* geometrischen Verhältnisse, wie 12 zu 6; findet diefs nicht Statt, so ist das Verhältniss ein *irrationales*, wie 12 zu 7.

Aus dem Begriffe eines geometrischen Verhältnisses ergibt sich leicht, dafs ein jeder Bruch die Eigenschaft eines solchen Verhältnisses habe.

§. 97.

Verhältnisse derselben Art werden *gleich* genannt, wenn sie entweder gleiche Differenzen oder gleiche Exponenten haben. Die Gleichheit zweier Verhältnisse derselben Art heifst *Proportion*, die *arithmetisch* oder *geometrisch* ist, je nachdem sie aus arithmetischen

oder geometrischen Verhältnissen besteht. Es ist daher

$$8 \div 5 = 12 \div 9$$

eine arithmetische, und

$$8 : 4 = 18 : 9$$

eine geometrische Proportion.

Die beiden ersten Glieder der Verhältnisse heißen *Vorderglieder*, die übrigen *Hinterglieder* einer Proportion; das erste und letzte die *äußern*, das zweite und dritte die *innern*, oder *mittlern* Glieder; sind diese wechselseitig gleich, so heißt die Proportion eine *stetige*, und das Mittelglied die *mittlere Proportionalgröße*. Man hat daher

$$8 \div 6 = 6 \div 4$$

eine stetige arithmetische Proportion, und

$$12 : 6 = 6 : 3$$

eine geometrische stetige Proportion, und 6 die *mittlere Proportionalzahl* in beiden Proportionen.

§. 98.

Ist a das erste, b das zweite Glied, und d der Unterschied eines arithmetischen Verhältnisses, so ist $b = a \pm d$, und die allgemeine Formel für das arithmetische Verhältniss:

$$a \div a \pm d.$$

Man erhält also das Hinterglied eines jeden arithmetischen Verhältnisses, wenn man die Differenz entweder zum ersten Gliede addirt, oder von demselben subtrahirt. Hieraus folgt zugleich, dass die Differenz eines solchen Verhältnisses unverändert bleibt, wenn die nämliche Grösse beiden Gliedern desselben addirt oder subtrahirt wird.

§. 99.

Weil bei einem geometrischen Verhältnisse untersucht wird, wie oft eine Grösse in der andern enthalten ist, so muss eine durch die andere dividirt werden. Sind also a , b die Glieder, und e der Exponent des geometrischen Verhältnisses, so ist die allgemeine Formel dieses Verhältnisses:

$$a : b = e, \text{ oder } \frac{a}{b} = e, \text{ folglich } b = \frac{a}{e}.$$

1. Aus dem ersten Gliede, und dem Exponenten wird also das zweite Glied eines geometrischen Verhältnisses gebildet, wenn das erste Glied durch den Exponenten dividirt wird.

2. Weil ferner in dem Werthe eines Quotienten nichts geändert wird, wenn man Dividendus und Divisor durch die nämliche Grösse vervielfacht, oder dividirt; so bleibt auch ein geometrisches Verhältniss unverändert, wenn beide Glieder durch dieselbe Zahl vervielfacht oder dividirt werden.

Ist nun ein Verhältniss, dessen Glieder Brüche sind, z. B. $\frac{15}{7} : \frac{8}{5}$ gegeben, so lassen sich diese Brüche nach §. 50 aufheben, und man hat $15 \times 5 : 8 \times 7 = 75 : 56$.

Hieraus erhellet ferner, dass ein Verhältniss auf seine kleinste Benennung gebracht werden kann. So geht $24 : 14$ über in $12 : 7$.

Ein jedes irrationale Verhältniss lässt sich also auch vermittelst der Kettenbrüche durch Näherung ausdrücken. Ein Beispiel ist das Verhältniss des Kreisumfangs zu seinem Diameter, oder zu seinem Halbmesser. (Vergl. *Grundlehren der Geometrie* etc. §. 255 pag. 154).

§. 100.

Die Grössen a, b, c, g seien in einer arithmetischen Proportion, nämlich

$$a \div b = c \div g,$$

und d die gemeinschaftliche Differenz, so ist in jedem Falle:

$$a - b = d = c - g;$$

wird nun auf beiden Seiten erst b und dann auch g addirt, so ergibt sich:

$$a + g = b + c;$$

da nun auf der linken Seite des Gleichheitszeichens die Summe der äussern Glieder, und auf der Rechten die Summe der Mittelglieder der gegebenen Proportion ausgedrückt sind, so folgt:

1. Dafs in jeder arithmetischen Proportion die Summe der äussern Glieder der Summe der Mittelglieder gleich ist.

Wäre $a = 20$, $b = 13$, $c = 26$ und $g = 19$, so ist $20 \div 13 = 26 \div 19$, und hieraus:

$$20 + 19 = 13 + 26 = 39.$$

2. Das doppelte Mittelglied einer stetigen arithmetischen Proportion ist also gleich der Summe der beiden äussern Glieder, mithin das mittlere Glied selbst der halben Summe der äussern Glieder gleich.

3. Aus Art. 1 ergibt sich leicht die Methode, die vierte arithmetische Proportionalzahl zu finden; man subtrahirt nämlich das gegebene Mittelglied von der Summe der äussern, wenn ein Mittelglied fehlt; oder man zieht das gegebene äussere Glied von der Summe der Mittelglieder ab, wenn ein äusseres Glied fehlt.

4. Bisweilen ist eine Anzahl Grössen gegeben, und man soll die Mittelgrösse — das arithmetische Mittel — suchen; man addire alle Grössen, und dividire diese Summe durch die Anzahl. Z. B. Ein Ingenieur hat die Entfernung zweier Punkte 5 mal gemessen und nie dieselbe Länge gefunden; soll er nun die mittlere Länge angeben, so muß er alle 5 Resultate addiren, und die Summe durch 5 dividiren. Es seien nun die Resultate der 5 Vermessungen:

erste 347,25

zweite 346,26

dritte 347,39

vierte 345,98

fünfte 345

Summe 1731,88

das arithmetische Mittel 346,376.

§. 101.

Es seien die gleichen Verhältnisse $a : b$ und $c : b$; so hat man nach §. 99. Art. 1.

$$\frac{a}{b} = e = \frac{c}{b},$$

wird in diesen gleichen Brüchen der Nenner b aufgehoben, so ist auch

$$a = c.$$

Hätte man hingegen $a : b = a : c$; so wäre auch

$$\frac{a}{b} = e = \frac{a}{c},$$

und wegen der gleichen Zähler dieser gleichen Brüche müssen auch die Nenner b und c gleich sein.

Wenn also in einer geometrischen Proportion zwei gleichnamige Glieder gleich sind, so müssen es auch die beiden übrigen sein.

§. 102.

In der Proportion

$$56 : 7 = 64 : 8$$

vervielfache man die Glieder des ersten Verhältnisses durch 64, und hierauf die Glieder des zweiten Verhältnisses durch das erste Vorderglied 56, und vergleiche dann die Resultate mit §. 99; so hat man:

$$56 \times 64 : 7 \times 64 = 56 : 7,$$

$$64 \times 56 : 8 \times 56 = 64 : 8;$$

folglich

$$56 \times 64 : 7 \times 64 = 64 \times 56 : 8 \times 56,$$

und wegen der Gleichheit der Vorderglieder muß auch sein:

$$7 \times 64 = 8 \times 56.$$

Wäre nun $a = 56$, $b = 7$, $c = 64$, $d = 8$, so muß auch sein

$$bc = ad.$$

Zu demselben Resultate gelangt man schneller, wenn man $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ schreibt, und erst durch b , und dann durch d die beiden Brüche vervielfacht.

1. In einer jeden geometrischen Proportion ist das Produkt der Mittelglieder dem Produkte der äußern Glieder gleich.

Fehlte nun eines der äußern Glieder, z. B. 8, so setze man dafür x , und man hat

$$56x = 7 \cdot 64;$$

dividirt man durch das gegebene äußere Glied 56, so ist

$$x = \frac{7 \cdot 64}{56} = 8.$$

Wäre nun eines der Mittelglieder, z. B. 7 unbekannt, so schreibe man dafür x , wodurch man erhält

$$64 x = 8 \times 56,$$

und hieraus

$$x = \frac{8 \times 56}{64} = 7.$$

2. In einer stetigen Proportion $144 : 24 = 24 : 4$ ist das Quadrat des Mittelgliedes dem Produkte der äussern Glieder gleich. Die mittlere geometrische Proportionalzahl wird also gefunden, wenn aus dem Produkte der äussern Glieder die Quadratwurzel gezogen wird. Fehlte z. B. das Mittelglied in der gegebenen Proportion, so hat man $x^2 = 144 \times 4 = 576$, mithin

$$x = \sqrt{576} = 24.$$

Ist aber ein äusseres Glied unbekannt, so nennt man seinen Werth die *dritte geometrische Proportionalgrösse*, wie wir in Grndl. d. Geometrie pag. 53, §. 98, Art. 2 gezeigt haben; sie wird erhalten, wenn man das Quadrat des Mittelgliedes durch das gegebene äussere dividirt.

§. 103.

Sind nun die gleichen Produkte

$$48 \times 6 = 24 \times 12$$

gegeben, so dividire man erst durch 6, und hierauf durch 12, und man erhält

$$\frac{48}{12} = \frac{24}{6},$$

und wenn die gleichen Brüche in Form einer Proportion geschrieben werden:

$$48 : 12 = 24 : 6.$$

Sind $ad = bc$ die gleichen Produkte, und man dividirt zuerst durch d , hierauf durch b , so erhält man ebenfalls die gleichen Brüche $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, und mithin

$$a : b = c : d.$$

Aus zwei gleichen Produkten läßt sich daher eine geometrische Proportion bilden, wenn die Faktoren des einen Produkts als Mittelglieder, die Faktoren des andern

Produkts aber als äussere Glieder betrachtet werden. Wäre $4 \times 64 = 16^2$ gegeben, so wird daraus $64 : 16 = 16 : 4$ gebildet.

§. 104.

Werden die Verhältnisse der Proportion

$$56 : 7 = 64 : 8$$

in Bruchform geschrieben, und diesen Brüchen die Einheit zu und abgezählt, so ist

$$\frac{56}{7} \pm 1 = \frac{64}{8} \pm 1,$$

und nach geschehener Reduktion

$$56 \pm 7 : 7 = 64 \pm 8 : 8.$$

Werden nun die Brüche der Einheit zu oder abgezählt, und hierauf unter gleiche Benennung gebracht, so erhält man folgende Proportion:

$$7 \pm 56 : 7 = 8 \pm 64 : 8.$$

Aus diesen beiden Proportionen ergibt sich, dass in jeder geom. Proportion die Summe oder Differenz der Glieder des ersten Verhältnisses zum ersten Hintergliede sich verhält, wie die Summe oder Differenz der Glieder des zweiten Verhältnisses zum zweiten Hintergliede.

§. 105.

Die Proportion $48 : 12 = 24 : 6$ giebt

$$\frac{48}{12} = \frac{24}{6};$$

multiplicirt man zuerst die Zähler und hierauf auch die Nenner dieser gleichen Brüche durch irgend eine Zahl m , so ergeben sich folgende neue Proportionen:

$$48m : 12 = 24m : 6, 48 : 12m = 24 : 6m.$$

Werden ferner zuerst Zähler und dann auch die Nenner obiger gleichen Brüche durch irgend eine Zahl m dividirt, so erhält man

$$\frac{48}{m} : 12 = \frac{24}{m} : 6, 48 : \frac{12}{m} = 24 : \frac{6}{m}.$$

In jeder Proportion lassen sich also die gleichnamigen Glieder durch die nämliche Grösse multipliciren oder dividiren, ohne dass dadurch die Proportion selbst verändert wird.

Vermöge dieses Grundsatzes lassen sich gleichnamige Glieder einer Proportion auf ihre kleinste Be-

nennung bringen; und die Brüche dadurch aus einer Proportion wegschaffen, wenn die gleichnamigen Glieder durch das Produkt der Nenner der Brüche vielfacht und hierauf die gemeinschaftlichen Faktoren aufgehoben werden. Hätte man z. B.

$$a : \frac{b}{n} = c : \frac{d}{r},$$

so erhält man

$$a : br = c : dn,$$

oder auch

$$an : b = cr : d \text{ (§. 99, Art. 2).}$$

§. 106.

1. In der Proportion

$$30 : 15 = 18 : 9$$

dividire man zuerst die Vorderglieder durch 18, und hierauf die Hinterglieder durch 9; so erhält man

$\frac{30}{18} : \frac{15}{9} = 1 : 1$, und hieraus $\frac{30}{18} = \frac{15}{9}$; folglich, wenn man die Brüche in Form einer Proportion schreibt:

$$30 : 18 = 15 : 9.$$

In einer jeden Proportion lassen sich also die Mittelglieder gegen einander vertauschen, ohne dass dadurch in der Gleichheit der Verhältnisse etwas geändert wird. Man nannte dieß sonst ab alternando schliessen.

2. In der Proportion dividire man das erste Verhältniß durch 30, und das zweite durch 18, so erhält man $1 : \frac{15}{30} = 1 : \frac{9}{18}$, und vermöge §. 101, $\frac{15}{30} = \frac{9}{18}$, woraus folgt

$$15 : 30 = 9 : 18.$$

Zu dieser Proportion wäre man auch gelangt, wenn 1 durch die gleichen Brüche $\frac{30}{18} = \frac{15}{9}$ dividirt worden wäre; denn man erhält aus $\frac{1}{\frac{30}{18}} = \frac{1}{\frac{15}{9}}$ die Brüche $\frac{15}{30} = \frac{9}{18}$, und daraus die vorige Proportion.

Wird also die Ordnung der Glieder beider Verhältnisse umgekehrt, so können die äussern Glieder in die Stellen der Mittelglieder, und die Mittelglieder für die äussern Glieder, ohne dass dadurch die Proportion aufgehoben wird, gesetzt werden. Man heisst dieß die Proportion umkehren, oder ab invertendo schliessen.

§. 107.

1. Werden in der Proportion

$$96 : 24 = 12 : 3$$

die Mittelglieder verwechselt, so verwandelt sie sich in folgende

$$96 : 12 = 24 : 3,$$

aus welcher Proportion vermöge §. 104 gebildet wird

$$96 \pm 12 : 12 = 24 \pm 3 : 3;$$

woraus durch abermalige Verwechselung der Mittelglieder sich ergibt:

$$96 \pm 12 : 24 \pm 3 = 12 : 3 = 96 : 24.$$

d. h. in jeder Proportion verhält sich die Summe oder Differenz der Vorderglieder zur Summe oder Differenz der Hinterglieder, wie die Glieder eines jeden Verhältnisses der gegebenen Proportion.

2. Da nach dem Vorhergehenden

$$96 + 24 : 12 + 3 = 24 : 3$$

$$96 - 24 : 12 - 3 = 24 : 3,$$

so hat man wegen des gemeinschaftlichen Verhältnisses $24 : 3$ folgende Proportion:

$$96 + 24 : 12 + 3 = 96 - 24 : 12 - 3,$$

und durch Verwechselung der Mittelglieder:

$$96 + 24 : 96 - 24 = 12 + 3 : 12 - 3,$$

d. h. in jeder Proportion ist die Summe der Vorderglieder zu ihrer Differenz, wie die Summe der Hinterglieder zu ihrer Differenz.

§. 108.

Ist nun eine Reihe gleicher Verhältnisse gegeben:

$$48 : 12 = 18 : 6 = 21 : 7 = 9 : 3,$$

so hat man

$$48 + 18 : 12 + 6 = 18 : 6 = 21 : 7,$$

hieraus wiederum

$$48 + 18 + 21 : 12 + 6 + 7 = 21 : 7 = 9 : 3,$$

und endlich

$$48 + 18 + 21 + 9 : 12 + 6 + 7 + 3 = 9 : 3 = 21 : 7 = 48 : 12.$$

Wie groß auch die Anzahl gleicher Verhältnisse sein mag, so verhält sich immer die Summe aller Vorderglieder zur

Summe aller Hinterglieder, wie das erste zum zweiten Gliede eines jeden Verhältnisses.

§. 109.

Mit Hilfe dieses Satzes ist §. 140 p. 81 der Grund-
lehren der Geometrie bewiesen; es lassen sich auch
folgende Aufgaben auflösen.

1) *Die Zahl 64 in drei solche Theile zu theilen, dass
der erste zum zweiten, wie 3 : 5, der zweite zum dritten,
wie 5 : 8 sich verhalte.*

Nennt man die Theile a, b, c , so muß sein

$$a : b = 3 : 5, \text{ und } b : c = 5 : 8,$$

und hieraus durch Verwechslung der Mittelglieder

$$a : 3 = b : 5 = c : 8,$$

folglich

$a + b + c : 3 + 5 + 8 = a : 3 = b : 5 = c : 8$,
oder weil $a + b + c = 64$, $3 + 5 + 8 = 16$, hat man

$$64 : 16 = a : 3, \text{ und daher } a = \frac{64 \cdot 3}{16} = 12;$$

$$64 : 16 = b : 5, \quad \text{»} \quad \text{»} \quad b = \frac{64 \cdot 5}{16} = 20;$$

$$64 : 16 = c : 8, \quad \text{»} \quad \text{»} \quad c = \frac{64 \cdot 8}{16} = 32,$$

$$\text{Summe der Theile} = 64,$$

und $12 : 20 = 3 : 5$, $20 : 32 = 5 : 8$.

2) *Ein Gewinn von 21 Gulden soll unter drei Personen
nach Verhältniss ihrer Einlagen vertheilt werden; nun ist
die Einlage der ersten 56 fl., die der zweiten 78 fl., und
die der dritten 76 fl., so fragt sich: wie viel eine jede
Person vom Gewinne zu beziehen hat?*

Es sei a der Antheil der ersten, b der Antheil
der zweiten, c der Antheil der dritten Person, mithin

$$56 : a = 78 : b = c : 76;$$

wird wie vorhin verfahren und 21 für $a + b + c$, und
210 für $56 + 78 + 76$ gesetzt, so ist:

$$210 : 21 = 56 : a, \text{ folglich } a = 5, 6,$$

$$210 : 21 = 78 : b, \quad \text{»} \quad b = 7, 8,$$

$$210 : 21 = 76 : c, \quad \text{»} \quad c = 7, 6.$$

Im Allgemeinen wird bei dergleichen Aufgaben der verhältnißmäßige Gewinn eines jeden gefunden, wenn der ganze Gewinn durch die Summe aller Einlagen dividirt, und dieser Quotient durch die Einlage eines jeden vervielfacht wird.

3) Zu einem gemeinschaftlichen Unternehmen giebt Jemand 1200 auf 8 Monate, ein Anderer 800 fl. auf 10 Monate, und ein Dritter 600 fl. auf 14 Monate; mit der ganzen Einlage wird die Summe von 900 fl. gewonnen; wieviel wird nun ein jeder von dem Gewinne zu empfangen haben?

Es ist einerlei, ob 1200 fl. während 8 Monaten oder 8 mal 1200 fl. nur einen Monat hindurch verwandt werden, dasselbe findet Statt für 800 fl. innerhalb 10 Monaten, und für 600 fl. innerhalb 14 Monaten, mithin ist die ganze Einlage für einerlei Zeit

$1200 \cdot 8 + 800 \cdot 10 + 600 \cdot 14 = 9600 + 8000 + 8400 = 26000$; es erhält also, vermöge der so eben angegebenen Regel, vom Gewinne:

$$\text{der erste } \frac{9600}{26000} \times 9600 = 332\frac{4}{13} \text{ fl.},$$

$$\text{der zweite } \frac{8000}{26000} \times 9600 = 276\frac{2}{13} \text{ fl.},$$

$$\text{der dritte } \frac{8400}{26000} \times 9600 = 290\frac{10}{13} \text{ fl.}$$

§. 110.

1. Die Verhältnisse der gegebenen Proportionen

$$10 : 5 = 34 : 17, \quad 18 : 3 = 12 : 2$$

bringe man unter die Form von Brüchen, also

$$\frac{10}{5} = \frac{34}{17}, \quad \text{und} \quad \frac{18}{3} = \frac{12}{2};$$

vervielfache diese Brüche, wodurch sich ergibt:

$$\frac{10 \times 18}{5 \times 3} = \frac{34 \times 12}{17 \times 2},$$

und hieraus

$$10 \cdot 18 : 5 \cdot 3 = 34 \cdot 12 : 17 \cdot 2, \quad \text{oder} \quad 180 : 15 = 408 : 34.$$

Wären noch mehrere Proportionen gegeben, so bringe man die Verhältnisse unter Bruchform, und vervielfache die Brüche so, daß die ersten Verhältnisse immer auf der linken Seite sich finden; der erste Zähler ist das Produkt der ersten Vorderglieder, der zugehörige Nenner das Produkt aller er-

sten Hinterglieder; der zweite Zähler das Produkt aller zweiten Vorderglieder, und der entsprechende Nenner das Produkt aller zweiten Hinterglieder. *Werden daher die gleichnamigen Glieder gegebener Proportionen vervielfacht, so bilden die Produkte abermals eine Proportion.*

2. Hieraus folgt unmittelbar, *dass wenn die Glieder einer Proportion zur nämlichen Potenz erhoben werden, diese Potenzen ebenfalls in einer Proportion sein müssen.*

Hätte man $10 : 2 = 25 : 5$, so muß auch sein
 $10^2 : 2^2 = 25^2 : 5^2$, oder $100 : 4 = 625 : 25$,
 und allgemein:

$$10^m : 2^m = 25^m : 5^m.$$

3. *Wird also umgekehrt aus den Gliedern einer Proportion dieselbe Wurzel gezogen, so müssen auch diese Wurzeln wiederum in Proportion sein.*

§. 111.

Aus den gegebenen Proportionen

$48 : 12 = 24 : 6$, und $16 : 8 = 34 : 17$
 erhält man nach §. 102

$48 \cdot 6 = 12 \cdot 24$, und $16 \cdot 17 = 8 \cdot 34$;
 wird die erste durch die zweite Gleichheit dividirt,

so erhält man $\frac{48 \cdot 6}{16 \cdot 17} = \frac{12 \cdot 24}{8 \cdot 34}$, oder

$$\frac{48}{16} \times \frac{6}{17} = \frac{12}{8} \times \frac{24}{34}, \text{ und hieraus vermöge §. 103}$$

$$\frac{48}{16} : \frac{12}{8} = \frac{24}{34} : \frac{6}{17},$$

oder nach geschehener Reduktion

$$3 : \frac{3}{2} = \frac{12}{17} : \frac{6}{17}, \text{ oder } 6 : 3 = 12 : 6.$$

Wenn daher die ähnlichen Glieder zweier Proportionen durcheinander dividirt werden, so bilden die erhaltenen Quotienten der Ordnung nach eine neue Proportion.

§. 112.

1. Es seien nun die Proportionen

$$a : b = c : d, \text{ und } a : e = c : f$$

gegeben; werden in beiden die Mittelglieder vertauscht, so ergeben sich

$$a : c = b : d, a : c = e : f,$$

und wegen des gemeinschaftlichen Verhältnisses $a : c$ ist auch

$$b : d = e : f.$$

Wären in der gegebenen Proportion a und c die Hinterglieder, mithin

$$b : a = d : c, \quad e : a = f : c,$$

so ergäbe sich wiederum durch Verwechslung der Mittelglieder

$$b : d = a : c = e : f.$$

Sind daher in zwei Proportionen die Vorderglieder gleich, so bilden die Hinterglieder einer jeden Proportion ein Verhältniß; da beide dem nämlichen dritten gleich sind, so bilden sie eine neue Proportion. Sind aber die Hinterglieder in zwei Proportionen gleich, so bilden auch die Vorderglieder wiederum eine Proportion, so daß die Vorderglieder der ersten Proportion das erste und die Vorderglieder der zweiten Proportion das zweite Verhältniß bilden.

2. Es seien ferner in zwei Proportionen die Mittelglieder die nämlichen Gröſſen, als

$$a : b = c : d, \quad e : b = c : f,$$

so hat man

$$ad = bc = ef,$$

und aus den beiden äußern Produkten die Proportion

$$a : e = f : d.$$

Wenn also in zwei Proportionen die Mittelglieder die nämlichen sind, so bildet man eine neue Proportion, indem man an die Stelle der Mittelglieder der ersten Proportion die äußern Glieder der zweiten Proportion schreibt.

§. 113.

Die Proportionen

$$2 : 4 = 3 : 6, \quad \text{und} \quad 4 : 12 = 18 : 54$$

geben durch Multiplikation

$$2 \cdot 4 : 4 \cdot 12 = 3 \cdot 18 : 6 \cdot 54,$$

und wenn durch 4 das erste Verhältniß dividirt wird,

$$2 : 12 = 3 \cdot 18 : 6 \cdot 54.$$

Man vergleiche nun diese Proportion mit folgender,

$$12 : 24 = 8 : 16,$$

indem man beide durcheinander vervielfacht, und hierauf das erste Verhältniß durch 12 dividirt, so entsteht

$$2 : 24 = 3 \cdot 18 \cdot 8 : 6 \cdot 54 \cdot 16.$$

Das Verhältniß $2 : 12$ ist aus den Verhältnissen $3 : 6$ und $18 : 54$ zusammengesetzt. In der Geometrie wird bewiesen, daß die Flächenräume zweier Dreiecke im zusammengesetzten Verhältnisse der Höhen und Grundlinien sind.

Das Verhältniß $2 : 24$ ist aus drei Verhältnissen $3 : 6$, $18 : 54$, $8 : 16$ zusammengesetzt. So sind die körperlichen Räume zweier rechtwinklichten Parallelepipeden im zusammengesetzten Verhältnisse der drei Kanten, welche einen körperlichen Winkel bilden.

§. 114.

Werden nun die Verhältnisse, aus welchen ein anderes zusammengesetzt werden soll, wechselseitig gleich angenommen, als:

$$16 : 8 = 12 : 6$$

$$8 : 4 = 12 : 6$$

$$4 : 2 = 12 : 6$$

$$2 : 1 = 12 : 6$$

so ergeben sich $16 : 4 = 12^2 : 6^2$; $16 : 2 = 12^3 : 6^3$, $16 : 1 = 12^4 : 6^4$. Das Verhältniß $16 : 4$ ist ein *duplicirtes* der Zahlen $12 : 6$; $16 : 2$ im *triplicirten* der Zahlen $12 : 6$. Die Flächenräume zweier ähnlichen Dreiecke sind im duplicirten Verhältnisse gleichnamiger Seiten; die körperlichen Räume zweier Kugeln im triplicirten Verhältnisse der Halbmesser oder Durchmesser.

kehrt man die Sache um, so muß auch sein:

$$12 : 6 = \sqrt[3]{16} : \sqrt[3]{4}; \quad 12 : 6 = \sqrt[3]{16} : \sqrt[3]{2}.$$

§. 115.

Sollen zwei Dinge miteinander verglichen werden, so geschieht dieses dadurch, daß die Zahlen, wodurch die beiden Größen beziehungsweise, d. h. hinsichtlich ihrer Einheit bezeichnet sind, unter sich vergli-

chen werden, und in diesem Falle bilden die heterogenen Dinge ein Verhältniß, welches dem Verhältniße der Zahlen gleich gesetzt zu werden pflegt. Setzt man die Dinge veränderlich, und nimmt an, daß beide zugleich zu- oder abnehmen, so sind die Dinge selbst im *graden* — *direkten* — Verhältniße; z. B. Kapital und Zinsen; vermehrt man nämlich, mit Beibehaltung des nämlichen Zinsfußes, das Kapital, so müssen auch die Zinsen vermehrt werden.

Nimmt hingegen ein Glied des Verhältnisses zu, während das andere vermindert wird, und umgekehrt, so stehen diese Dinge im *umgekehrten* — *indirekten*, *reciproken* — Verhältniße. Wenn z. B. in einer gewissen Zeit eine Arbeit von einer Anzahl Arbeiter vollendet werden soll, so können Arbeiter und Zeit miteinander verglichen werden; wird nun die Anzahl der Arbeiter vermehrt, so werden diese, bei gleicher Anstrengung, dieselbe Arbeit in weniger Zeit verrichten. Wollte man aber die Zahl der Arbeiter vermindern, so müßte die Zeit der Arbeit verlängert werden.

§. 116.

Die Bestimmung der vierten Proportionalgröße heißt auch die einfache *Dreisatzregel* (*regula de tribus*), die *einfach*, oder *zusammengesetzt* sein kann.

Um die einfache Dreisatzregel durch ein Beispiel zu erläutern, sollen die Zinsen des Kapitals 7582 gesucht werden, wenn man für 100 fl. jährlich 5 fl. erhält. Man setze die beiden Kapitalien in ein Verhältniß, also 100 : 7582; da mit Erhöhung des Kapitals auch die Zinsen sich vermehren, so sind diese im *geraden* Verhältniße mit den Kapitalien; werden die gesuchten Zinsen durch x bezeichnet, so hat man folgende Proportion:

$$100 : 7582 = 5 : x,$$

und daraus

$$x = \frac{5 \times 7582}{100} = 379,1.$$

Für dergleichen Aufgaben kann man sich folgender Auflösungsart bedienen: *Man erhält so oft den*

festgesetzten Zins, als 100 in dem Kapital enthalten ist, nämlich $\frac{7582}{100} \times 5$. Sollten nun die Zinsen für mehrere Jahre gefunden werden, so vervielfache man die Zinsen eines Jahres durch die Anzahl der Jahre. Die Zinsen des Kapitals 7582 innerhalb 10 Jahren beliefen sich also auf $\frac{7582}{100} \times 5 \times 10 = 3791$. Um dieses Verfahren allgemein zu machen, bezeichne man durch a das Kapital, durch b den Zinsfuß, und durch m die Anzahl der Jahre, so hat man für die Zinsen f die Formel:

$$f = \frac{a}{100} b m.$$

§. 117.

Um nun die indirekte Dreisatzregel durch ein Beispiel zu erläutern, frage man, in wieviel Zeit 20 Arbeiter eine Arbeit vollenden können, wenn in 16 Tagen dasselbe Geschäft durch 40 Arbeiter verrichtet würde? Nennt man die zwei homogenen Größen, wovon die eine unbekannt ist, die Hauptgrößen, die übrigen aber Beziehungsgrößen, so hat man hier das Verhältniß 16 : x Tagen für die Hauptgrößen. Da nun die Anzahl der Arbeiter vermindert wird, so muß die zur nämlichen Arbeit erforderliche Zeit verlängert werden, folglich sind die Tage im umgekehrten Verhältniß mit den Arbeitern, man hat daher

$$16 : x = 20 : 40 = 1 : 2,$$

folglich die erforderliche Anzahl Tage

$$x = 32.$$

Die allgemeine Regel für die indirekte Dreisatzrechnung läßt sich folgendermaßen aussprechen: Eine Hauptgröße verhält sich zur andern, wie die Beziehungsgröße, welche der zweiten Hauptgröße entspricht, zur zweiten Beziehungsgröße.

§. 118.

Die Beziehungsgrößen in der Dreisatzrechnung hängen sehr oft noch von andern Größen ab, so daß das Verhältniß der Hauptgrößen aus Verhältnissen mehrerer Beziehungsgrößen zusammengesetzt werden

mufs, in welchem Falle die Dreisatzregel *zusammengesetzt* genannt wird. Aufgaben, welche hieher gehören, lassen sich auf zweierlei Art auflösen; man setzt nämlich das Verhältnifs der Hauptgröfsen gleich dem Verhältniffe, welches aus allen direkten und indirekten Verhältnissen der Beziehungsgröfsen der Aufgabe zusammengesetzt wird. — Die zweite Auflösungs-methode besteht darin, dafs die Ursachen mit den Wirkungen verglichen werden.

Beide Auflösungsarten lassen sich in folgendem Beispiele darthun, nämlich: 45 Arbeiter, wovon jeder täglich 8 Stunden beschäftigt ist, bearbeiten innerhalb 15 Tagen ein Feld von 360 Ruthen; in wieviel Zeit wird nun ein Feld von 120 Ruthen von 30 Arbeitern, von denen jeder täglich 10 Stunden beschäftigt ist, bearbeitet werden können?

Hier sind die Zeiten die Hauptgröfsen, es mufs also ihr Verhältnifs $15:x$ auf folgende Weise bestimmt werden:

$$15 : x = \left\{ \begin{array}{l} 30 : 45 = 2 : 3 \\ 360 : 120 = 3 : 1 \\ 10 : 8 = 5 : 4 \end{array} \right\} = 2 \cdot 3 \cdot 5 : 3 \cdot 1 \cdot 4,$$

oder wenn im letzten Verhältniffe die gemeinschaftlichen Faktoren aufgehoben werden,

$$15 : x = 5 : 2, \text{ und hieraus } x = 6.$$

Um dieses Verfahren zu rechtfertigen, lösen wir die Verhältnisse in ihre einfachen auf, und sagen: wenn 45 Arbeiter irgend ein Geschäft innerhalb 15 Tagen vollenden; in wieviel Tagen werden 30 Arbeiter dasselbe Geschäft zu Ende bringen? Nimmt man an, in y Tagen, so hat man, wegen des umgekehrten Verhältnisses der Zeiten mit den Arbeitern folgende Proportion:

$$15 : y = 30 : 45 = 2 : 3 \dots\dots (1);$$

wird nun 360 die Arbeit genannt, welche von den Arbeitern innerhalb y Zeit verrichtet wird, so läfst sich fragen, in wieviel Zeit z das Geschäft 120 Ruthen abgethan wird? da nun die Zeiten im direkten Verhältnisse der Arbeiter sind, so hat man

$$y : z = 360 : 120 = 3 : 1 \dots\dots (2);$$

Weil z Tage nothwendig sind, um ein gewisses Geschäft zu vollenden, wenn täglich 8 Stunden gearbeitet wird, so fragt sich, wieviel Tage erfordert werden zum nämlichen Geschäfte, wenn die nämliche Anzahl Arbeiter täglich 10 Stunden an der Arbeit ist? Da die Tage mit den Arbeitsstunden im umgekehrten Verhältnisse sind, so ist:

$$z : x = 10 : 8 = 5 : 4 \dots (3).$$

Vervielfacht man die Proportionen (1), (2), (3) nach §. 113, so erhält man, wie vorhin,

$$15 : x = 2 \cdot 3 \cdot 5 : 3 \cdot 1 \cdot 4.$$

Zweite Auflösungsart. Es ist einerlei, ob 45 Arbeiter nach einander 15×8 Stunden, oder ob $45 \times 15 \times 8$ Arbeiter nur eine Stunde beschäftigt sind, um 360 Ruthen zu bearbeiten; $30 \cdot 10x$ Arbeiter werden also auch in einer Stunde das Geschäft von 120 Ruthen vollenden; da nun die Arbeiter, als Ursachen, mit den Arbeiten, als Wirkungen in derselben Zeit, angesehen werden können, mithin jene mit dieser im direkten Verhältnisse stehen; so ist

$$8 \cdot 15 \cdot 45 : 30 \cdot 10x = 360 : 120 = 3 : 2,$$

woraus nach gehöriger Reduktion $x = 6$.

Bisweilen wird eine Arbeit nach ihrem körperlichen Inhalte beurtheilt, wie wenn z. B. ein Damm von 216 Ruthen Länge, 6 Ruthen Breite, und 3 Ruthen Höhe aufgeworfen werden sollte, in welchem Falle die Gröfse der Arbeit durch das Produkt, $216 \times 6 \times 3$ körperliche Ruthen, ausgedrückt ist; im übrigen ist wie vorhin zu verfahren.

Achstes Kapitel.

Von den Gleichungen des ersten Grades.

§. 119.

Jeder Ausdruck, in welchem eine bestimmte Verbindung zwischen beliebig gewählten Zahlen einer zweiten ähnlichen Verbindung gleichgesetzt wird, heisst eine *Gleichung*; es wird also durch sie die nämliche Grösse auf eine zweifache Art ausgedrückt.

Gewöhnlich werden durch derlei Zahlenverknüpfungen die Beziehungen bekannter und unbekannter Grössen, welche aus den Umständen einer gegebenen Aufgabe erkannt werden, dargestellt, und mit Hilfe arithmetischer Operationen der Werth einer unbekannten Grösse in bekannten Grössen entwickelt. Dieser Werth heisst *Wurzel* der Gleichung, und die Auffindung der Wurzeln wird *Auflösung* der Gleichung genannt. Der Inbegriff der Regeln, mittelst welcher die Wurzeln der Gleichungen aufgefunden werden können, heisst gewöhnlich *Algebra*.

§. 120.

Die Gleichungen theilt man in Hinsicht der Anzahl der in ihnen verwickelten unbekannten Grössen in *bestimmte* und *unbestimmte* ein, je nachdem nur eine einzige, oder mehrere unbekannten Grössen in derselben Gleichung vorkommen.

Die Gleichungen werden ferner vom *ersten*, *zweiten*, *dritten*, *vierten* . . . ; *Grade* genannt, je nachdem nämlich die höchste Summe der Exponenten der unbekannten Grössen eines Gliedes 1, 2, 3, 4 . . . ist. Die Gleichungen des ersten Grades heissen auch *einfache*; die vom zweiten Grade *quadratische* Gleichun-

gen; welche vom dritten Grade sind, werden *kubische* genannt. Nach diesen Erklärungen sind also $2x + 3 = 8$, $3x + 2y = 10$ *einfache*; hingegen $9x^2 + 7x = 20$; $xy + x = 13$ *quadratische*, und $14x^3 - 40x^2 + bx = 45$ *kubische* Gleichungen.

Erste Abtheilung.

Von den einfachen Gleichungen mit einer unbekannten Grösse.

§. 121.

Bei der Auflösung der einfachen Gleichungen mit einer einzigen Unbekannten kömmt es nur darauf an, die Form der Gleichungen so zu ändern, daß die unbekannte Grösse allein, mit dem positiven Zeichen behaftet, auf einer Seite des Gleichheitszeichens vorkomme, auf der andern Seite des Gleichheitszeichens hingegen nur allein Verbindungen bekannter Grössen sich vorfinden. Dieser Zweck wird durch Anwendung folgender Regeln erreicht:

1. *Jedes Glied läßt sich von einer Seite der Gleichung auf die andere mit verändertem Zeichen versetzen, ohne daß dadurch die Gleichung aufgehoben wird.*

Wird auf beiden Seiten der Gleichung

$$x - 4 = 10$$

das Glied 4 addirt, so hat man, weil $-4 + 4 = 0$,

$$x = 10 + 4 = 14.$$

Vermittelst dieser Regel lassen sich nun alle Glieder, welche die unbekannte Grösse enthalten, auf eine Seite der Gleichung bringen, auf welcher dann die angezeigten arithmetischen Operationen zu verrichten sind. In der Gleichung

$$10x - 12 = 9x - 5$$

bringe man erst $9x$ auf die linke, und 12 auf die rechte Seite des Gleichheitszeichens, so ist

$$10x - 9x = 12 - 5, \text{ und daher } x = 7.$$

2. *Findet sich die unbekannte Grösse nach Anwendung der vorigen Regel mit einem Coëfficienten behaftet, so dividire man auf beiden Seiten der Gleichung alle Glieder durch diesen Coëfficienten.*

In der Gleichung

$$8x - 7 = 23 - 7x,$$

bringe man erst alle x , und dann alle bekannten Zahlen auf eine Seite, und man erhält

$$8x + 7x = 23 + 7 = 30, \text{ oder } 15x = 30, \text{ und daraus } x = 2.$$

3. Findet sich die unbekannte Grösse in einem oder in mehrern Gliedern als eine gebrochene Zahl; so multiplicire man nach und nach alle Glieder der Gleichung durch jeden Nenner, und bringe hierauf die beiden vorhergehenden Regeln, wenn es nöthig ist, in Anwendung.

Man kann in einem solchen Falle alle Glieder, in welchen die unbekannte Grösse als Bruch vorkömmt, auf einer Seite des Gleichheitszeichens vereinigen, diese Brüche unter einerlei Benennung bringen, und hierauf auf beiden Seiten durch den gemeinschaftlichen Nenner multipliciren. Es sei die Gleichung

$$2x + 7 + \frac{3x}{2} = 6x - 23,$$

deren Glieder, durch den Nenner 2 vervielfacht, folgende Form erhalten:

$$4x + 14 + 3x = 12x - 46;$$

hieraus nach Regel 1.

$$14 + 46 = 12x - 7x = 5x, \text{ und hieraus}$$

$$x = \frac{14 + 46}{5} = \frac{60}{5} = 12.$$

Man löse folgende Gleichung auf, nämlich:

$$\frac{2x}{3} + \frac{x}{2} - 20 = \frac{3x}{4} - 5,$$

hieraus

$$\frac{2x}{3} + \frac{x}{2} - \frac{3x}{4} = 20 - 5 = 15,$$

oder

$$\frac{8x + 6x - 9x}{12} = \frac{5x}{12} = 15;$$

$$\text{folglich } x = \frac{12 \cdot 15}{5} = 12 \cdot 3 = 36.$$

4. Befindet sich endlich die unbekannte Grösse unter einem Wurzelzeichen auf einer Seite der Gleichung, so

müssen beide Theile zur Potenz des Wurzelexponenten erhoben werden.

Hätte man z. B. $\sqrt{x} = a$, so wäre $x = a^2$; und aus $a\sqrt{x} = b$ wird $a^3x = b^3$, mithin $x = \frac{b^3}{a^3}$.

§. 122.

Nachdem wir nun die Regeln angegeben haben, worauf die Auflösung einfacher Gleichungen mit einer unbekannten GröÙe sich gründet; so wollen wir zur Auflösung derjenigen Aufgaben übergehen, welche auf eine bestimmte einfache Gleichung führen, und welche deshalb auch *bestimmte* Aufgaben genannt werden; da hingegen alle Aufgaben *unbestimmt* bleiben, welche zu einer einzigen Gleichung mit mehr als einer Unbekannten führen. — Es giebt für die Auflösung der Aufgaben keine allgemeine Regel; man muß hauptsächlich die Bedingung aufsuchen, welche die Unbekannte ausdrückt, und mit dieser alsdann die arithmetischen Operationen vornehmen, welche in der Aufgabe angegeben sind.

Hier folgen bestimmte Aufgaben.

1) Man soll die Zahl 234 in zwei solche Theile theilen, daß der eine in dem andern $1\frac{1}{4}$ mal enthalten ist. Welches sind die Theile?

Aufl. Wird ein Theil durch x bezeichnet, so ist der andere $234 - x$, und vermöge der Bedingung der Aufgabe:

$$\frac{234 - x}{x} = 1\frac{1}{4} = \frac{5}{4},$$

hebt man die Brüche nach §, 121 Art. 3 auf, so ist

$$936 - 4x = 5x,$$

folglich

$936 = 5x + 4x = 9x$, mithin $x = \frac{936}{9} = 104$; der zweite Theil ist also $234 - 104 = 130$, und $\frac{130}{104} = 1\frac{26}{104} = 1\frac{1}{4}$.

2) Ein Feld von 864 Morgen soll unter drei Gutsbesitzer A , B , C so vertheilt werden, daß der Antheil des A zu dem des B sich verhalte, wie 5 : 11, und C soviel,

als A und B miteinander, bekomme. Wieviel wird jeder erhalten?

Aufl. Wird x der Antheil des A genannt, so muß $x : B = 5 : 11$ sein, mithin der Antheil des B $= \frac{11x}{5}$; da nun C soviel, als A und B, bekömmmt, so ist sein Antheil $x + \frac{11x}{5}$; folglich alle drei zusammen

$$x + \frac{11x}{5} + x + \frac{11x}{5} = 864;$$

wird der Nenner 5 aufgehoben, hierauf addirt, und durch den Coëfficienten von x dividirt, so hat man

$$32x = 4320, \text{ folglich } x = 135;$$

führt man 135 in die Antheile B und C ein, so findet sich $B = \frac{135 \times 11}{5} = 27 \times 11 = 297$; und $C = 135 + 297 = 432$.

3) Jemand legt ein Kapital von 5000 fl. zu 4 Procent, und $3\frac{1}{2}$ Jahre später ein anderes von 4800 fl. zu 5 Procent aus. Nach wieviel Jahren wird der Darleiher von beiden Kapitalien die nämliche Summe Zinsen beziehen können?

Aufl. Die Zinsen werden nach x Jahren gleich sein; das erste Kapital trägt innerhalb der ersten $3\frac{1}{2}$ Jahre $\frac{5000}{100} \times 4 \cdot 3\frac{1}{2} = 50 \cdot 4 \cdot \frac{7}{2} = 200 \times \frac{7}{2} = 700$ fl. Zinsen, und noch innerhalb x Jahren die Summe $\frac{5000}{100} \times 4x = 200x$, folglich die Zinsen des ersten Kapitals $= 700 + 200x$. Da nun $\frac{4800}{100} \times 5x = 48 \times 5x = 240x$ die Zinsen des zweiten Kapitals jenen gleich sein sollen, so hat man

$$240x = 200x + 700,$$

und hieraus $x = \frac{70}{4} = 17\frac{1}{2}$, d. h. nach $17\frac{1}{2}$ Jahren, von der Zeit an gerechnet, als das zweite Kapital dargeliehen wurde.

4) Es kauft Jemand zwei Stücke Tuch von verschiedener Länge, von beiden die Elle um denselben Preis; für das erste Stück bezahlt er 60 fl., und für das andere 78 fl. Wäre aber jedes Stück um 10 Ellen länger, so

verhielten sich die Zahlen, wodurch die Längen beider Tücher angegeben würden, wie 5 : 6. Wieviel bezahlte der Käufer für die Elle?

Aufl. Ist x der Preis der Elle, so ist $\frac{60}{x}$ die Länge des ersten, und $\frac{78}{x}$ die Länge des zweiten Stücks. Wird nun zu jeder Länge die Zahl 10 gezählt, so hat man vermöge der Bedingung der Aufgabe:

$$\frac{60}{x} + 10 : \frac{78}{x} + 10 = 5 : 6,$$

hat man das erste Verhältniß durch x vervielfacht, und nimmt dann die Produkte der äußeren und mittlern Glieder, so ist

$$360 + 60x = 390 + 50x,$$

woraus sich ergibt

$$x = 39 - 36 = 3,$$

d. h. die Elle kostete 3 fl. Ankauf.

5) Ein Vater giebt seinen beiden Söhnen A und B eine gleiche Summe zum Neujahrsgeschenke; A giebt davon 10 fl. aus, und bald darauf die Hälfte des Restes; B hingegen verwendet zuerst den vierten Theil seiner Baarschaft, und hierauf noch 2 fl. Als der Vater sie um die Verwendung des Geldes fragte, ergab sich, daß beide zusammen gerade soviel übrig hatten, als ein jeder vom Vater empfing. Wieviel hat ein jeder ausgegeben?

Aufl. In dem vorliegenden Falle enthält die Frage nicht die unbekannte GröÙe, diese wird vielmehr durch das vom Vater erhaltene Geschenk ausgedrückt. Hat also A die Summe x empfangen, so bleibt ihm nach seinen gemachten Ausgaben noch $x - 10 -$

$$- \frac{x - 10}{2} = \frac{x - 10}{2} \text{ übrig. Da nun auch B}$$

$$\text{dieselbe Summe } x \text{ erhielt, so blieben ihm noch } x - \frac{x}{4} - 2 = \frac{3x - 8}{4} \text{ fl. übrig; die Summe der}$$

Reste ist aber dem Geschenke x gleich, folglich:

$$\frac{x - 10}{2} + \frac{3x - 8}{4} = x;$$

bringt man die Brüche unter gleiche Benennung, und entwickelt hierauf x , so erhält man

$$x = 28.$$

Durch diesen Werth lassen sich die Ausgaben beider Söhne berechnen; A nämlich verbrauchte $10 +$

$$+ \frac{28 - 10}{2} = 10 + 9 = 19 \text{ fl.}, \text{ und B die Summe } \frac{28}{4} + 2 = 9 \text{ fl.}$$

6) Es werden drei Zahlen von der Beschaffenheit gesucht, daß ihre Summe 70, und wenn die zweite durch die erste dividirt wird, der Quotient 2 und der Rest 1 sei; wenn aber die dritte durch die zweite dividirt wird, der Quotient 3 und der Rest 3 erhalten werde. Welche Zahlen sind es?

Aufl. Da der Dividendus der Summe aus dem Produkte des Divisors in den Quotienten und aus dem Reste gleich ist, so hat man, wenn x für die erste Zahl genommen wird, die zweite $2x + 1$, die dritte $3(2x + 1) + 3 = 6x + 6$; addirt man diese drei Zahlen, so ist die Gleichung

$$x + 2x + 1 + 6x + 6 = 70;$$

hieraus erhält man

$$x = \frac{70 - 7}{9} = 7;$$

die Zahlen sind also $7 + 15 + 48 = 70$.

7) Es hat Jemand drei Stücke Metall von gleichem Volumen; man weiß aber, daß 5 Cubikfuß der ersten Masse $69\frac{1}{4}$ ℔; $3\frac{1}{3}$ Cubf. der zweiten Masse 41 ℔ schwer sind, und $4\frac{2}{7}$ Cubf. der dritten Masse gerade 91 ℔ wiegen; man weiß überdieß, daß das Gewicht der drei Massen zusammen $949\frac{2}{3}$ ℔ beträgt. Wie groß ist nun das Volumen jeder Masse?

Aufl. Es sei x das gesuchte Volumen; es ist leicht einzusehen, daß die erste Masse so oft $69\frac{3}{4}$ ℔ wiegt, als 5 im Volumen x enthalten ist, mithin $\frac{69\frac{3}{4} x}{5} =$
 $= \frac{279 x}{20}$ das Gewicht der ersten Masse; auf gleiche Weise ergeben sich die Gewichte der zwei-

ten $= \frac{41 x}{3\frac{1}{3}} = \frac{123 x}{10}$, und der dritten Masse $= \frac{91 x}{4\frac{2}{7}} = \frac{637 x}{30}$; die Summe aller Gewichte ist daher

$$\frac{279 x}{20} + \frac{123 x}{10} + \frac{637 x}{30} = 949\frac{2}{3} = 2849\frac{2}{3}.$$

Da alle Nenner Faktoren der Zahl 60 sind, so hat man

$$\frac{279 \cdot 3 x + 123 \cdot 6 x + 637 x}{60} = \frac{56980}{60};$$

wird der gemeinschaftliche Nenner 60 aufgehoben, und hierauf addirt, so ist

$2849 x = 56980$, und $x = \frac{56980}{2849} = 20$, also jede Masse enthält 20 Cubikfufs.

8) Ein Bote kann $\frac{3}{4}$ Meilen in einer Stunde zurücklegen, während ein anderer ebensoviel Zeit zu einer halben Meile nöthig hat; dieser letztere ist aber dem erstern schon um 5 Meilen vorausgeeilt: es fragt sich, in wieviel Zeit dieser vom ersten Boten eingeholt wird?

Aufl. Nimmt man an, daß die Zusammenkunft nach x Stunden Statt haben wird, so ist der ganze Weg $\frac{3}{4} x$ durch den nacheilenden Boten zu machen; da derselbe Weg auch durch $5 + \frac{1}{2} x$ Meilen ausgedrückt wird, so hat man die Gleichung

$$\frac{3}{4} x = 5 + \frac{1}{2} x,$$

oder, nach Wegschaffung der Brüche,

$$3 x = 20 + 2 x, \text{ mithin } x = 20,$$

d. h. nach 20 Stunden werden beide Boten zusammentreffen.

Hieher gehört die Frage, auf welchen Stellen innerhalb 12 Stunden die beiden Zeiger einer Taschenuhr sich decken werden? Der Minutenzeiger durchläuft in einer Zeitminute 12 Minuten Wegs, während der Stundenzeiger in derselben Zeit nur eine Minute Wegs zurücklegt, folglich ist dieser Weg nur der zwölfte Theil dessen, welcher vom Minutenzeiger in derselben Zeit durchlaufen wird. Es ist nun $\frac{1}{4}$ vor neun Uhr, wann werden die beiden Zeiger zusammenkommen? Man setze nach x Minuten; da der grofse Zei-

ger in dem Augenblicke der Frage auf 45 Minuten deutet, so steht der Stundenzeiger auf 8 Uhr $3\frac{3}{4}$ Minuten; denn bis jener 12 deckt, muß dieser 9 anzeigen nach Verlauf derselben Zeit; bis dahin ist also der Weg des kleinen Zeigers $\frac{1}{12} \cdot \frac{5}{2} = 1\frac{1}{4}$ Minuten; hieraus folgt, daß der Stundenzeiger einen Weg von $15 + 40 + 3\frac{3}{4}$ Minuten voraus hat, und noch x Minuten zurücklegt, für den langen Zeiger ist derselbe Weg $12 x$, daher

$$12 x = x + 58\frac{3}{4},$$

und hieraus $x = 5\frac{1}{4}$ Minuten nach drei Viertel auf 9 Uhr, folglich $\frac{10}{11}$ Minuten vor 10 Uhr.

9) *Salpeter und Schwefel sind zu einer Masse von 80 ℔ vermisch, und zwar in einem Verhältnisse, daß auf 7 Theile Salpeter 3 Theile Schwefel genommen werden. Wieviel Salpeter muß der Masse noch zugesetzt werden, wenn das Verhältniß beider Stoffe 11:4 sein soll?*

Aufl. Da in der Mischung 80 ℔ eben so oft 7 Theile enthalten sein müssen, als 3 Theile Schwefel, so braucht man nur zu untersuchen, wie oft die Summe der Theile $7 + 3 = 10$ in der Mischung 80 enthalten ist; da dieses 8 mal Statt findet, so hat man $7 \times 8 = 56$ ℔ Salpeter, und $3 \times 8 = 24$ ℔ Schwefel; nimmt man x für den Salpeterzusatz, so hat man

$$56 + x : 24 = 11 : 4,$$

und hieraus $x + 56 = 66$, folglich $x = 10$.

§. 123.

Hier folgen zur Uebung einige Beispiele:

1) Ein Vater verordnet in seinem Testamente, daß sein Vermögen 8600 fl. so unter seine 4 Söhne vertheilt werden soll, daß der erste zweimal soviel weniger 100 fl., als der zweite; der zweite dreimal soviel als der dritte, weniger 200 fl.; der dritte endlich viermal soviel, weniger 300 fl., als der vierte bekomme. Wie groß ist der Antheil eines jeden?

2) Ein Vater hinterläßt 3650 fl., welche unter seine 11 Kinder so vertheilt werden sollen, daß jeder Sohn 300 fl., und jede Tochter 360 fl. bekomme. Nach

der vorgenommenen Theilung fand sichs aber, daß noch 50 fl. übrig blieben. Wieviel Söhne waren es?

3) Man soll die Zahl 90 in zwei solche Theile theilen, daß wenn die Hälfte des größern Theils zum doppelten kleinern addirt wird, diese Summe 90 sei. Wie groß sind die Theile?

4) Jemand besitzt 3 Gefäße von einem solchen Inhalte, daß wenn das zweite mittelst der Flüssigkeit des ersten gefüllt wird, in diesem noch $\frac{2}{3}$ bleiben; wird aber das dritte aus dem ersten gefüllt, so fehlen noch 8 Maas. Wieviel Maase wird jedes Gefäß halten?

5) Ein Gärtner vertheilt eine Anzahl Aepfel unter seine drei Freunde auf folgende Art: er giebt dem ersten das Drittel weniger 11; dem zweiten das Drittel des Restes weniger 11; und dem dritten das Drittel dieses Restes weniger 11. Nach dieser Theilung ergab sichs, daß er seinen Freunden von seinem Vorrathe nur die Hälfte gegeben hat. Wieviel Aepfel hatte er?

6) Welche Zahl ist es, wenn sie durch 3 vervielfacht, das Produkt um 15 vermehrt, diese Summe durch 6 dividirt, und zum Quotienten 6 addirt wird, daß die gesuchte Zahl herauskomme?

7) Ein Bauer geht mit einem Korbe, voll Eiern, auf den Markt, und verkauft davon den dritten Theil und noch 10, hat aber das Unglück zu fallen, wobei er $\frac{2}{3}$ des Restes zerbricht, behält jedoch noch 90 Eier übrig. Wieviel brachte er auf den Markt?

8) Vier Diebe stahlen einen Beutel, in welchem sich eine Anzahl Dukaten befand; der stärkste unter ihnen nimmt sich 33 Dukaten heraus, und die übrigen drei jeder eine bestimmte Summe. Diese ungleiche Theilung veranlaßt Streitigkeiten, so daß der Hauptmann befahl, derjenige, welcher das meiste nahm, solle die Anzahl der Dukaten aller übrigen verdoppeln, und nach und nach immer derjenige, welcher das meiste hat, das nämliche thun müsse. Dadurch geschah es nun, daß ein jeder zuletzt gleichviel

hatte. Die Frage ist nun: Wieviel Dukaten waren im Beutel, und wieviel nahm jeder Dieb im Anfange?

9) Es soll eine Zahl gefunden werden, daß, wenn man zu ihrem Vierfachen noch 52 zählt, dieselbe Zahl erhalten werde, als wenn man von der gesuchten Zahl 17 abzieht, und den Rest durch 5 vervielfacht.

10) Wenn eine gewisse Zahl durch 15 vervielfacht, und zum Produkte 185 gezählt wird, so ergibt sich eine Summe, welche man auch erhält, wenn man zu der nämlichen Zahl 39 addirt, und diese Summe durch 13 vervielfacht. Welche Zahl ist es?

11) Welche Zahl ist es, daß, wenn von ihr 11 abgezogen, der Rest durch 22 vervielfacht, zu diesem Produkte 29 addirt, die Summe durch 19 dividirt wird, der Quotient der Zahl gleich ist?

12) Eine Zahl zu finden, welche, wenn sie durch 31 vervielfacht, vom Produkte 75 abgezogen, der Rest durch 23 dividirt wird, der Quotient so groß ist, als wenn man zur gesuchten Zahl 11 gezählt hätte.

13) Wenn man das Dreifache einer gewissen Zahl von 5868 abzieht, den Rest durch 8 dividirt, von dem Quotienten 123 abzieht, so ist der Rest der gesuchten Zahl gleich. Was ist für eine Zahl?

14) Man soll eine Zahl finden, welche man durch 7 vervielfache, vom Produkte 57 abziehe, den Rest durch 7 multiplicire, vom Produkte 114 abziehe, den Rest siebenmal nehme, und vom Produkte 171 abziehe; nach diesen Rechnungen erhält man die gesuchte Zahl.

15) Einige Personen verzehrten in einem Gasthause eine gewisse Summe Geldes; der Wirth machte ihnen folgende Rechnung: Wenn mir jede der Personen 10 fl. bezahlt, so verliere ich 7 fl.; bezahlt mir aber jede 11 fl., so gewinne ich 6 fl. Wieviel Personen waren es?

16) Eine Bäuerinn verkauft 20 Eier, und nachher ein Zehntel des Restes; es findet sich, daß sie den vierten Theil weniger 3 ihres ganzen Vorrathes

verkauft hatte. Wieviel Eier brachte sie auf den Markt?

17) Zwei Personen A und B besitzen schon eine Summe Geldes, und zwar A fl. 312, und B fl. 220; A braucht zu seinem Unterhalte in 7 Tagen 5 fl. über seinen Verdienst; B hingegen verdient in 5 Tagen 3 fl. mehr, als er ausgiebt. Wann werden A und B eine gleiche Summe Geldes besitzen?

18) Ein General verliert in einer Schlacht den zehnten Theil seiner Truppen, und bald darauf in einem Scharmützel noch 300 Mann; in einer zweiten Schlacht blieb der zehnte Theil der noch übrigen Mannschaft, und als man nach diesem letzten Verluste die noch übrigen Krieger zählte, ergab sich, daß nur der fünfte Theil des ganzen Truppencorps mangelte. Wie stark war die Heerabtheilung?

19) Ein Vater verordnete in seinem Testamente, daß sein hinterlassenes Vermögen von 5850 fl. unter seine drei Söhne, vier Töchter und seine zurückgebliebene Gattin so vertheilt werde, daß der Antheil zweier Söhne so groß sei, als der für 3 Töchter, und daß die Mutter die Hälfte des Antheils eines Sohnes und einer Tochter bekomme. Wie groß wird der Antheil eines jeden sein?

20) Zwei Frauen bringen jede eine gewisse Summe Geldes auf den Markt, um Käse zu kaufen. Die erste kauft 250 fl. , und bringt noch 3 fl. nach Hause; die andere kauft um den nämlichen Preis 350 Pfunde, zu derer Bezahlung ihr noch 7 fl. mangelten. Wieviel Geld brauchte jede von ihnen auf den Markt?

21) Drei Personen A, B, C besitzen eine Summe Geldes; A und B haben zusammen 340 fl.; B und C die Summe von 384 fl.; C und A aber 356 fl. Wieviel besaß jede von ihnen?

22) Vier Personen A, B, C, D verloren 796 fl., welchen Verlust alle vier nach Verhältniß der Einlagen zu tragen haben. Nun aber haben A und B die Summe von 1955 fl.; B und C zusammen 1685; C und D ein Kapital von 2025 fl., und D eine Summe

von 295 fl. mehr als A vorgeschossen. Wieviel vom Verluste trifft nun einen jeden?

23) Ein Sohn fragte seinen Vater, wie alt er sei? Worauf der Vater antwortete: Mein Alter ist nun das dreifache des deinigen; es sind aber sechs Jahre, als mein Alter viermal so groß war als das deinige?

24) Die Zahl 208 so in zwei Theile zu theilen, daß die Summe des Viertels des größten und ein Drittel des kleinern Theils, vermehrt um 3, gleich sei dem vierfachen Unterschiede beider Theile. Wie groß sind die Theile?

25) Jemand, der nach der Zeit gefragt wurde, antwortete: Der Rest bis zu 24 Stunden ist der fünfte Theil der schon abgelaufenen Stunden. Wie viel Uhr war es?

26) Ein anderer, an welchen die nämliche Frage gerichtet wurde, sagte: Heute sind es 16 Stunden vom Aufgang bis zum Untergange der Sonne; zählt man $\frac{1}{3}$ der seit Sonnenaufgang abgelaufenen Stunden zu $\frac{4}{5}$ der Stunden von jetzt bis zum Untergange der Sonne, so erhält man die so eben abgelaufene Stunde. Wieviel Uhr war es im Augenblicke der Frage?

27) Zwei Spieler setzten sich mit gleichen Summen an den Spieltisch; einer von ihnen verlor 12, der andere 57 fl., und dieser letztere Verlust war gerade das Viertel dessen, was der erste Spieler übrig behielt. Wieviel brachten sie zum Spiele?

28) Ein Gärtner wollte einige Alleen anlegen; pflanzt er 15 Bäume in jede Allee, so fehlen ihm noch 9 Bäume; pflanzte er aber nur 14 Bäume in jede, so würde er eine Allee mehr erhalten, und es blieben noch 2 Bäume übrig. Wieviel Bäume hatte er, und wieviel Alleen konnte er damit anlegen?

29) Drei Maurer sollen eine Mauer aufführen; der erste kann allein eine Mauer von 3 Schuh in 5 Stunden fertig bringen; der zweite eine Mauer von 2 Fuß in 3 Stunden; der dritte endlich 7 Fuß in 11 Stunden. In wieviel Zeit können alle drei eine Mauer von 36 Fuß aufführen?

30) Jemand kauft ein Haus für 2451 fl. baar; wie theuer muß er es verkaufen, wenn gleich $\frac{1}{3}$ des Kaufpreises, $\frac{1}{3}$ nach einem Jahre, und der Rest nach zwei Jahren bezahlt werden soll, er rechnet aber Zins aus Zins zu $6\frac{1}{4}$ für 100, um keinen Verlust und keinen Gewinn zu haben?

31) Diophant verlebte in seiner Jugend den sechsten Theil seines ganzen Lebens; ein Zwölftel als Jüngling; hierauf verheurathete er sich, und in dieser Verbindung verlebte er den siebenten Theil seines Lebens und noch 5 Jahre, bevor ihm ein Sohn geboren ward, welchen er um 4 Jahre überlebte, der nur die Hälfte des Alters seines Vaters erreichte. Wie alt ist Diophant geworden?

32) Ein Kaufmann nimmt alle Jahre von seinem im Handel steckenden Kapital 1000 fl. für sein Haus, vermehrt aber den Rest um den dritten Theil, und hatte so nach Verlauf von 3 Jahren sein anfängliches Vermögen verdoppelt. Wie groß war dieß im Anfange?

Zweite Abtheilung.

Gleichungen des ersten Grades mit zwei und mehreren unbekannten Größen.

§. 124.

Sind zwei Gleichungen mit zwei unbekannten Größen gegeben, so müssen beide in eine einzige Gleichung zusammengezogen, d. h. eine der beiden Unbekannten muß eliminirt werden, welche Endgleichung nur eine von beiden unbekannten Größen enthält, und wird nach den oben angegebenen Regeln behandelt, um daraus den Werth der Unbekannten zu entwickeln, welcher in eine der beiden Gleichungen eingeführt zu einer andern einfachen Gleichung führt, aus welcher der Werth für die andere unbekannte Größe entwickelt werden kann.

Es giebt indess verschiedene Arten, eine Größe aus zwei Gleichungen zu eliminiren, und zwar:

1. Aus einer von beiden Gleichungen ziehe man den Werth für eine unbekannte Grösse, und setze diesen an die Stelle der Unbekannten in der andern Gleichung. Es seien z. B. die Gleichungen

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 118, \\ x + 5y &= 191 \end{aligned}$$

gegeben; aus der zweiten ziehe man $x = 191 - 5y$, und führe diesen Werth in die erste Gleichung ein, so erhält man

$3(191 - 5y) + 2y = 118$, oder $573 - 15y + 2y = 118$; und hieraus nach geschעהener Reduktion

$$y = \frac{573 - 118}{13} = \frac{455}{13} = 35;$$

schreibt man diesen Werth in jenen für x , so ist

$$x = 191 - 5 \cdot 35 = 16.$$

Man löse ferner die Gleichungen auf:

$x + y = 24$, $3x + y = 60$; und $x + y = 50$, $3x = 7y$.

2. Man kann auch aus beiden Gleichungen die Werthe für dieselbe Unbekannte entwickeln, und beide einander gleich setzen, wodurch man eine Endgleichung mit einer unbekannten Grösse erhält.

Es seien die Gleichungen

$$\begin{aligned} 5x - 3y &= 1, \\ 7y - 4x &= 13; \end{aligned}$$

aus der ersten ist $x = \frac{1 + 3y}{5}$, und aus der zwei-

ten $x = \frac{7y - 13}{4}$; setzt man diese Werthe einander gleich, so ist,

$$\frac{7y - 13}{4} = \frac{1 + 3y}{5};$$

hebt man die Nenner auf, und reducirt, so ist

$$35y - 12y = 65 + 4 = 69, \text{ also } y = \frac{69}{23} = 3;$$

dieser Werth giebt $x = \frac{3 \cdot 3 + 1}{5} = 2.$

3. Beide Gleichungen lassen sich auch addiren oder subtrahiren, je nachdem die Zeichen der zu eliminirenden Grösse verschieden, oder die nämlichen sind. Dieses Ver-

fahren findet jedoch nur dann seine Anwendung, wenn die Coëfficienten der zu eliminirenden Gröfßen gleich sind.

Es sind gegeben

$$x + y = 36,$$

$$x - y = 28;$$

durch Addition beider Gleichungen

$$2x = 64, \text{ und } x = 32;$$

durch Subtraktion der zweiten von der ersten

$$2y = 8, \text{ und } y = 4.$$

Ferner seien gegeben

$$9x + 6y = 60$$

$$8x + 6y = 54;$$

subtrahirt man die letztere von der ersten Gleichung, so bleibt

$$x = 6, \text{ und deshalb } y = \frac{60 - 9 \cdot 6}{6} = 1.$$

Sind aber die Coëfficienten der zu eliminirenden Grösse ungleich, so vervielfache man die erste Gleichung durch den Coëfficienten der zu eliminirenden Grösse der zweiten Gleichung; und die zweite Gleichung durch den Coëfficienten derselben Unbekannten in der ersten Gleichung, und verfähre mit diesen neuen Gleichungen nach der eben angegebenen Regel.

Die Gleichungen seien

$$4x + 3y = 115$$

$$5x - 2y = 46;$$

man vervielfache die erste durch 2, die zweite durch 3, so ergeben sich

$$8x + 6y = 230$$

$$15x - 6y = 46;$$

wird addirt, so ist

$$23x = 368, \text{ und hieraus } x = 16;$$

mit Hilfe dieses Werthes ist $y = \frac{115 - 4 \cdot 16}{3} = 17.$

Will man x eliminiren, so vervielfache man die erste Gleichung durch 5, die zweite durch 4, so finden sich folgende Gleichungen:

$$\left. \begin{array}{l} 20x + 15y = 575 \\ 20x - 8y = 184 \end{array} \right\} ; \text{ subtrahirt } y = \frac{391}{23} = 17.$$

Es sollen folgende Gleichungen aufgelöst werden:

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{11} = 26, \text{ und } \frac{x}{2} + y = 46; 13x + 440 = 27y, \text{ und } 7y + 44 = 5x; 56x + 278 = 47(x + y), \text{ und } 28y + 832 = 17(x + y).$$

§. 125.

Wenn aus einer gegebenen Aufgabe sovieler Gleichungen sich entwickeln lassen, als unbekannte Größen darin sind, so ist die Aufgabe *bestimmt*; und *unbestimmt* im Gegentheile. Hier folgen einige solcher Aufgaben:

1) Man soll die Zahl 36 in drei solche Theile theilen, dass die Hälfte des ersten, das Drittel des zweiten, und ein Viertel des dritten Theils gleich sind. Wie groß müssen die Theile sein?

Aufl. Es sei x der erste, y der zweite, mithin $36 - x - y$ der dritte Theil; man hat daher die Gleichungen

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3}, \text{ und } \frac{y}{3} = \frac{36 - x - y}{4};$$

aus der ersten Gleichung ist $x = \frac{2y}{3}$, und wenn dieser Werth in die zweite Gleichung eingeführt wird, so ist

$$\frac{y}{3} = \frac{36 - \frac{2y}{3} - y}{4};$$

hebt man die Nenner auf, so ergibt sich

$$4y = 108 - 2y - 3y = 108 - 5y,$$

hieraus folgt

$$9y = 108, \text{ mithin } y = \frac{108}{9} = 12,$$

und der erste Theil $x = \frac{2 \cdot 12}{3} = 8$, der dritte Theil $= 36 - 8 - 12 = 16$, die Theile sind also 8, 12, 16.

2) Wäre Alexander der Grofse 5 Jahre früher gestorben, so hätte er gerade den vierten Theil seines Lebens regiert; hätte er aber 9 Jahre länger regiert, so würde die Dauer seiner Regierung gerade die Hälfte sei-

nes ganzen Lebens ausgemacht haben. Wie lange hat er gelebt und regiert?

Aufl. Hätte er x Jahre regiert, und y Jahre gelebt, so würde er, vermöge der ersten Bedingung, $y - 5$ Jahre gelebt, und $x - 5$ Jahre regiert haben; da nun diese letzte Dauer dem vierten Theile seines Lebens gleich gewesen wäre, so hat man

$$x - 5 = \frac{y - 5}{4} \dots (1).$$

Vermöge der zweiten Bedingung gelangt man zu folgender Gleichung:

$$x + 9 = \frac{y + 9}{2};$$

wird von dieser Gleichung die vorige (1) abgezogen, so bleibt

$$14 = \frac{y + 9}{2} - \frac{y - 5}{4} = \frac{2y + 18 - y + 5}{4} = \frac{y + 23}{4},$$

und hieraus

$$y = 56 - 23 = 33;$$

Alexander lebte also 33 Jahre, wie uns die Geschichtschreiber belehren; seine Regierungsperiode ist

$$x = \frac{33 - 5}{4} + 5 = 7 + 5 = 12.$$

3) Es sollen drei Zahlen gesucht werden, wovon die dritte um 5 gröfser als die erste ist; wird die Summe aller durch die erste und hierauf auch durch die dritte vervielfacht, so ergeben sich die Produkte 48 und 128. Welche Zahlen sind es?

Aufl. Die beiden ersten Zahlen seien x und y , folglich die dritte $x + 5$, also $x + y + x + 5$ die Summe der drei Zahlen; es sind daher die Gleichungen

$$(2x + y + 5)x = 48,$$

$$(2x + y + 5)(x + 5) = 128;$$

wird diese durch jene dividirt, so ist

$$\frac{x + 5}{x} = \frac{128}{48}, \text{ mithin } 48x + 240 = 128x,$$

und hieraus $240 = 128x - 48x = 80x$, also

$$x = \frac{240}{80} = 3,$$

die dritte Zahl mithin $= 5 + 3 = 8$, und die zweite $(6 + y + 5) \cdot 3 = 48$, oder $y + 11 = 16$, und $y = 5$; die gesuchten Zahlen sind also 3, 5, 8.

4) Eine gewisse Zahl wird mit zwei Ziffern geschrieben, deren Summe, ohne auf ihre Stelle zu achten, die Hälfte der Zahl ist; wird aber 63 zur gesuchten Zahl addirt, so entsteht eine Zahl mit den nämlichen Ziffern, aber in umgekehrter Ordnung geschrieben. Welche Zahl ist es?

Aufl. Man bezeichne durch x die Einheiten, und durch y die Ordnung der Zehner, so ist $10y + x$ die Zahl, und $x + y$ die Summe der Einheiten in beiden Ziffern; man hat daher

$$y + x = \frac{10y + x}{2}$$

und nach gehöriger Reduktion

$$y = \frac{x}{8} \dots\dots (1).$$

Vermöge der zweiten Bedingung

$$10y + x + 63 = 10x + y,$$

hieraus erhält man nach geschehener Reduktion

$$x - y = 7 \dots\dots (2);$$

schreibt man aus (1) den Werth für y , so ist

$$x - \frac{x}{8} = 7, \text{ und hieraus } x = \frac{56}{7} = 8,$$

folglich, wenn dieser Werth in (2) gesetzt wird,

$$y = 1;$$

es ist also 18 die gesuchte Zahl.

5) Man suche eine Zahl, aus zwei Ziffern bestehend, welche dem Vierfachen der Summe der Einheiten der Ziffer gleich ist; wird die Ordnung der Ziffer umgekehrt, so ergiebt sich eine Zahl, welche sechsmal gröfser ist, als die Summe der Ziffer, und noch 12. Welche Zahl ist es?

6) Zwei Zahlen zu suchen von der Beschaffenheit, dafs wenn der Unterschied ihrer Quadrate durch die Summe der Zahlen dividirt wird, der Quotient 55 sei; wird aber dieselbe Differenz durch die Differenz der Zahlen dividirt, so ist 99 der Quotient. Welche Zahlen sind es?

Aufl. Sind x und y die Zahlen, so ist $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ die Differenz der Quadrate; mithin die Gleichungen

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 55 \\ x + y = 99 \end{array} \right\} x = 77, y = 22.$$

7) 37 Pfund Zinn verlieren im Wasser gewogen 5 ℔, und 23 ℔ Blei in der nämlichen Flüssigkeit 2 ℔. Man hat nun eine Masse, aus Zinn und Blei bestehend, von 120 ℔, welche im Wasser 14 ℔ an Gewicht verliert. Wieviel von beiden Metallsorten enthält die Mischung?

Aufl. Sind x der Zinn- und y der Bleizusatz, so hat man

$$x + y = 120 \dots (1).$$

Da nun 37 ℔ im Wasser 5 ℔ verlieren, so ist der Verlust für 1 ℔ = $\frac{5}{37}$, und für x ℔ = $\frac{5x}{37}$, der Ver-

lust für y ℔ Blei ist also $\frac{2y}{23}$, und daher beider Metalle zusammengekommen

$$\frac{5x}{37} + \frac{2y}{23} = 14,$$

durch Aufhebung der Brüche

$$115x + 74y = 11914 \dots (2);$$

vervielfacht man (1) durch 74, so ist

$$74x + 74y = 8880,$$

und diese Gleichung von (2) abgezogen, giebt

$$41x = 3034,$$

und hieraus

$$x = \frac{3034}{41} = 74,$$

$$\text{also } y = 120 - x = 120 - 74 = 46.$$

Diese Aufgabe gehört eigentlich zu den einfachen Gleichungen; denn wenn die Mischung x Pfund Zinn enthält, so sind $120 - x$ ℔ Blei darin, und die

$$\text{Gleichung wird alsdann } \frac{5x}{37} = \frac{(120 - x) 2}{23}.$$

8) *B* giebt 12600 fl. mehr als *A* auf Zinsen; da *B* ein Procent mehr nimmt, so bezieht er 730 fl. Zinsen mehr als *A*. Ein dritter *C* legt 3000 fl. mehr, um 2 Procent höher als *A*, aus, und bezieht defshalb auch 380 fl.

Zinsen mehr, als A. Wie groß sind die Kapitalien, und der Zinsfuß?

Aufl. Hat A ein Kapital von x , so hat B die Summe $12600 + x$, und C das Kapital $3000 + x$; A bezieht Zinsen $\frac{xy}{100}$, und die Zinsen des B sind

$$\frac{(x + 12600)(y + 1)}{100} = \frac{xy}{100} + \frac{12600y}{100} + \frac{x}{100} + \frac{12600}{100},$$

welche Summe um 730 fl. größer als $\frac{xy}{100}$ sein muß; es ist daher

$$\frac{xy}{100} + \frac{12600y}{100} + \frac{x}{100} + \frac{12600}{100} = \frac{xy}{100} + 730;$$

wird $\frac{xy}{100}$ abgezogen, der gemeinschaftliche Nenner 100 weggeschafft, und reducirt, so ist

$$x + 12600y = 60400 \dots (1).$$

Auf gleiche Weise wird die zweite Gleichung entwickelt,

$$\begin{aligned} \frac{xy}{100} + 380 &= \frac{(x + 3000)(y + 2)}{100} \\ &= \frac{xy}{100} + \frac{3000y}{100} + \frac{2x}{100} + \frac{6000}{100}, \end{aligned}$$

und hieraus nach geschehener Reduktion

$$2x + 3000y = 32000;$$

wird (1) durch die Zahl zwei vervielfacht, und hierauf von dieser Gleichung abgezogen, so bleibt

$$22200y = 88800, \text{ also } y = 4.$$

Setzt man diesen Werth in die Gleichung (1), und reducirt, so erhält man das Kapital des A, nämlich

$$x = 10000;$$

B hat also 22600 fl. zu 5 Procent, und C eine Summe von 13000 zu 6 Procent.

9) Es kauft Jemand 11 Aepfel und 15 Birnen um 15 Kreuzer; um dieselben Preise kauft er nachher 50 Birnen, und 10 Aepfel, und zahlt im allgemeinen 25 Kreuzer. Wieviel Aepfel und wieviel Birnen hatte er um 5 Kreuzer gekauft?

10) Ein Tagelöhner hatte mit seiner Frau bei einem

Bauern gearbeitet, und gewann 60 fl. innerhalb 36 Tage, von denen er jedoch 18 ganz allein arbeitete; hierauf arbeitete er abermals 25 Tage, aber nur 15 mit seiner Frau; wie stark war der Taglohn des Tagelöhners und seiner Frau?

11) Innerhalb 12 Minuten wurde ein Gefäß von 39 Maas gefüllt, indem man darein zwei Brunnenröhre leitete; aus einer flossen 4 Maas in einer Minute, und aus der andern 3 Maas in derselben Zeit. Wie lang lief jede der beiden Röhren?

12) Ein Kaufmann hatte zwei Sorten Thee, und zwar 146 Pfund zu 5 fl., und 123 Pfund zu 2 fl. das Pfund. Er will nun von beiden Sorten ein Gemisch machen, um das Pfund zu 3,25 fl. verkaufen zu können. Von dem Reste machte er eine zweite Mischung zu 3,8 fl. das Pfund. Es fragt sich, wieviel Pfunde er von jeder Sorte bei jeder Mischung gebrauchte?

13) Ein Vater hinterläßt eine Wittwe mit 5 Kindern, und nur 135 fl., welche auf folgende Weise vertheilt werden sollen: Jedes Kind, vom jüngsten an, soll soviel Gulden bekommen, als es Jahre zählt, und noch $\frac{1}{10}$ des Restes, die Mutter aber den Rest des Vermögens. Es fand sich, daß jedes Kind gleichviel empfangen hat, und der Antheil der Mutter ebensoviel Einheiten enthält, als die Summe der Jahre ihrer 5 Kinder. Wie alt war jedes Kind?

14) Fünf Kinder haben zusammen 70 Jahre, und sollen mit ihrer Mutter das hinterlassene Vermögen des Vaters theilen. Jedes der Kinder bekommt soviel Gulden, als es Jahre zählt, und noch $\frac{1}{10}$ des Restes; es blieben noch 189 fl. übrig, und jedes Kind bekam dieselbe Summe. Wie alt war jedes Kind, wie groß sein Antheil am Vermögen, und wie groß das ganze Vermögen?

Was die Gleichungen mit mehr als zwei Unbekannten anbelangt, so müssen diese nach den Regeln des §.s 124. nach und nach eliminirt werden, d. h. man reducirt die n Gleichungen auf $n - 1$; diese auf $n - 2$, ... bis man eine Endgleichung mit einer Unbekannten erhält.

Neuntes Kapitel.

Gleichungen des zweiten Grades.

§. 126.

Die allgemeine Form des Quadrates einer zweitheiligen Gröfse $(x + A)$ ist

$$x^2 + 2 Ax + A^2 = (x + A)^2 \dots (\alpha)$$

wo A , positiv oder negativ, eine ganze oder gebrochene Zahl sein kann. Soll nun eine quadratische Gleichung auflösbar sein, so muß sie sich auf diese Form zurückbringen lassen; wäre $A=0$, so hätte man die einfache quadratische Gleichung, welche wir in §. 78 ausführlich genug behandelt haben.

Vergleichen wir nun die allgemeine Form

$$x^2 + ax = b \dots (\beta)$$

einer zusammengesetzten quadratischen Gleichung, worin a und b ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahlen sein können; der besondere Fall, daß x^2 noch einen Coëfficienten bei sich haben kann, wird leicht unter die Form (β) gebracht, wenn man die ganze Gleichung durch diesen Coëfficienten dividirt. Vergleicht man nun (β) mit (α) , so erkennt man leicht, daß in (β) noch das Quadrat des zweiten Theils des Binomiums fehlt; damit also der erste Theil jener Gleichung ein vollständiges Quadrat werde, bemerke man, daß $2 Ax$ das doppelte Produkt des ersten in den zweiten Theil des Binomiums $x + A$ ist, und umgekehrt A erhalten wird, wenn $2 Ax$ durch $2 x$ dividirt wird. Der erste Theil der Gleichung (β) wird daher ein vollständiges Quadrat, wenn man ax , als das doppelte Produkt der beiden Theile der Wurzel, durch $2 x$ dividirt, und den Quotienten $\frac{1}{2} a$, zum Qua-

drat erhoben, zur Gleichung (β) addirt; hiedurch erhält man

$$x^2 + ax + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = b + \frac{1}{4}a^2;$$

nun ist aber

$$x^2 + ax + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2}a\right)^2,$$

also muß auch sein

$$\left(x + \frac{1}{2}a\right)^2 = b + \frac{1}{4}a^2;$$

wird auf beiden Seiten die Quadratwurzel ausgezogen, und hierauf $\frac{1}{2}a$ auf die andere Seite gebracht, so hat man:

$$x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{b + \frac{1}{4}a^2} \dots (\gamma)$$

welcher Werth immer für $+b$ reell ist; findet sich aber $-b > \frac{1}{4}a^2$, so sind die Wurzeln imaginär.

§. 127.

Aus dem vorigen Verfahren lassen sich folgende Regeln für die Auflösung zusammengesetzter quadratischen Gleichungen angeben, nämlich:

1. Man setze alle Glieder, die x enthalten, in den ersten Theil der Gleichung, das aber das Quadrat von x positiv sei; ist dies noch mit einem Coëfficienten behaftet, so dividire man dadurch die ganze Gleichung.

2. Hierauf nehme man die Hälfte des Coëfficienten der unbekannten Gröfse x , und addire das Quadrat dieser Hälfte zu beiden Seiten der Gleichung, wodurch der erste Theil ein vollständiges Quadrat einer zweitheiligen Gröfse wird.

3. Auf beiden Seiten der Gleichung werde nun die Quadratwurzel ausgezogen; die Wurzel des ersten Theils ist immer die Unbekannte, welcher die Hälfte des Coëfficienten von x mit seinem Zeichen zugezählt werden muß; diese neue Gleichung werde nun nach schon bekannten Regeln aufgelöst.

Um die Sache leichter einsehen zu können, sei die Gleichung

$$x^2 + 14x = 51;$$

man addire $\left(\frac{1}{2}14\right)^2 = 7^2 = 49$ auf beiden Seiten, so erhält man

$$x^2 + 14x + 49 = 51 + 49 = 100;$$

die Quadratwurzel des ersten Theils ist $x + \frac{1}{2} 14 =$
 $= x + 7$, mithin

$$x + 7 = \pm \sqrt{100} = \pm 10,$$

und hieraus wiederum

$$x = -7 + 10 = +3, \text{ oder } x = -7 - 10 = -17.$$

Wäre die gegebene Gleichung

$$x^2 - 14x = 51,$$

so dürfte man in dem vorhergehenden Werthe blos
 $+7$ in -7 verwandeln, und man hätte $x = +7 +$
 $+10 = 17$, oder $x = +7 - 10 = -3$, welche
 Werthe den obigen grade entgegengesetzt sind.

§. 128.

Eine zusammengesetzte quadratische Gleichung läßt
 sich auch noch auf folgende Art auflösen. In der all-
 gemeinen Formel (β) zerlege man x in die Theile
 $y + h$, so erhält man

$$\begin{aligned} x^2 &= y^2 + 2hy + h^2 \\ ax &= ay + ah, \end{aligned}$$

folglich

$x^2 + ax = y^2 + (2h + a)y + h^2 + ah = b$;
 wäre der Coëfficient $2h + a = 0$, so verschwände
 dieses Glied, und man könnte y nach §. 78. finden;
 da aber h eine willkührliche Gröfse ist, so verfüge
 man darüber so, dafs $h = -\frac{1}{2}a$, d. i. der Hälfte
 des Coëfficienten von x mit entgegengesetztem Zeichen
 gleich sei; da ferner bei diesem Werthe von h das
 Glied ah immer negativ wird, mit welchem Zeichen
 auch a behaftet sein mag, so hat man immer

$$y^2 - \frac{1}{4}a^2 = b,$$

und hieraus

$$y = \pm \sqrt{b + \frac{1}{4}a^2},$$

daher

$$x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{b + \frac{1}{4}a^2}.$$

Um also nach diesem Verfahren eine quadratische
 Gleichung aufzulösen, setze man für die Unbekannte x
 eine andere y , und addire zu ihr die Hälfte des Coëffi-
 cienten von x mit entgegengesetztem Zeichen; hierauf setze
 man das Quadrat y^2 der Summe des zweiten Theils der

Gleichung und des Quadrats $\frac{1}{4} a^2$ gleich, bestimme die Quadratwurzel auf beiden Theilen, wodurch y erhalten wird; ist dieser Werth gefunden, so hat man auch $x = y - \frac{1}{2} a$. Betrachten wir nun die obige Gleichung $x^2 + 14x = 51$, wo $x = y - 7$ wird, und $y^2 = 51 + 7^2 = 100$, also $y = \pm \sqrt{100} = \pm 10$, und $x = \pm 10 - 7$, wie oben.

§. 129.

1) Man suche zwei Zahlen, deren Unterschied 9 und deren Produkt 442 ist. Welche Zahlen sind es?

Aufl. Wenn x die eine Zahl bezeichnet, so ist $x + 9$ die andere, also $x(x + 9) = x^2 + 9x$ das Produkt beider Zahlen, folglich

$$x^2 + 9x = 442;$$

vermöge der ersten Auflösungsart ist

$$x^2 + 9x + \left(\frac{1}{2} \cdot 9\right)^2 = 442 + \frac{81}{4} = \frac{1849}{4},$$

und da $x^2 + 9x + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{9}{2}\right)^2$, so muß sein:

$$x + \frac{9}{2} = \pm \sqrt{\frac{1849}{4}} = \pm \frac{43}{2},$$

folglich

$x = -\frac{9}{2} + \frac{43}{2} = 17$, oder $x = -\frac{9}{2} - \frac{43}{2} = -26$; da wir aber blos positive Zahlen suchen, so kann hier nur $x = +17$ seine Anwendung haben; die andere Zahl ist alsdann $x + 9 = 26$.

Will man sich der zweiten Auflösungsart bedienen, so setze man $x = y - \frac{9}{2}$, und $y^2 = 442 + \frac{81}{4} = \frac{1849}{4}$; mithin $y = \pm \sqrt{\frac{1849}{4}}$; und $x = \pm y - \frac{9}{2}$, wie vorhin.

2) Man soll zwei Zahlen suchen, die um 5 verschieden sind, die Summe ihrer Quadrate ist 937. Welche sind diese Zahlen?

Aufl. Wenn x die eine Zahl ist, so muß die andere $x + 5$ sein, die Summe ihrer Quadrate $x^2 + (x + 5)^2 = 2x^2 + 10x + 25$, folglich die Gleichung

$$2x^2 + 10x + 25 = 937;$$

wie wird diese Gleichung aufgelöst?

3) Welche Zahlen sind es, deren Summe 34, und deren Produkt 273 ist?

4) Ein Garten, dessen Länge 6 Ruthen grösser ist, als seine Breite, hat eine Oberfläche von 91 Ruthen; man suche die Länge und Breite.

5) Man soll eine Zahl finden, deren Quadrat ebensoviel über 100, als 82 über der Zahl selbst ist.

6) Zwei Wachslichter, wovon die Beleuchtung des einen viermal grösser ist, als die des andern, stehen in einer Entfernung von 3 Fufs auf einer Tafel. Man soll auf ihrer Entfernungslinie einen Punkt suchen, welcher von beiden Lichtern gleich stark erleuchtet ist.

Aufl. Es sei x die Entfernung des schwächern Lichts von dem gesuchten Punkte auf der Verbindungslinie, mithin steht das stärkere $3 - x$ Fufs von diesem Punkte entfernt. Man weifs nun, dafs die Stärke des Lichts abnimmt, wie das Quadrat der Entfernung wächst, und mithin die Erleuchtungen sich umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen verhalten; es ist also

$$1:4 = x^2:(3 - x)^2,$$

und hieraus

$$4x^2 = 9 - 6x + x^2;$$

die aufzulösende Gleichung ist daher

$$x^2 + 2x = 3,$$

welche die Werthe giebt:

$$x = +1, \text{ und } x = -3.$$

Aus dem ersten Werthe erkennt man, dafs der Punkt zwischen die Lichter fällt, und 1 Fufs von dem schwächern entfernt ist; der andere Werth drückt aus, dafs auf der verlängerten Verbindungslinie jenseits des schwächern Lichtes noch ein Punkt ist, welcher 3 Fufs von dem schwächern Lichte entfernt liegt.

7) Man soll zwei Zahlen suchen, welche um 2 verschieden sind; wenn 1000 durch die erste, und auch durch die zweite dividirt wird, so ist 225 die Summe der Quotienten. Was sind es für Zahlen?

Aufl. Wenn die eine x ist, so mufs die andere $x + 2$ sein, mithin die Gleichung:

$$\frac{1000}{x} + \frac{1000}{x+2} = 225;$$

nach geschehener Reduktion ist die aufzulösende Gleichung

$$225 x^2 - 1550 x = 2000;$$

hat man durch 225 die ganze Gleichung dividirt, so hat man

$$x^2 - \frac{62}{9} x = \frac{80}{9},$$

welche zu einer vollständigen quadratischen Gleichung ergänzt giebt

$$x^2 - \frac{62}{9} x + \left(\frac{31}{9}\right)^2 = \frac{80}{9} + \frac{961}{81} = \frac{1681}{81},$$

hieraus

$$x = \frac{31}{9} \pm \sqrt{\frac{1681}{81}} = \frac{31}{9} \pm \frac{41}{9};$$

und wenn man blos $+\frac{41}{9}$ nimmt, so ist

$$x = \frac{31 + 41}{9} = \frac{72}{9} = 8,$$

folglich ist die andere Zahl $x + 2 = 10$.

8) Zwei Zahlen, wovon eine ein Quadrat ist, sollen gesucht werden, beider Zahlen Unterschied ist der Wurzel jenes Quadrats gleich; man weiß überdies, daß ihr Produkt zur Summe beider Quadrate sich verhält, wie 30:61. Welches sind diese Zahlen?

Aufl. Wenn x und y die Zahlen sind, so muß sein

$$x - y = \sqrt{x};$$

wird zum Quadrat erhoben, so ist

$$x^2 - 2xy + y^2 = x,$$

und daraus

$$x^2 + y^2 = x(2y + 1) \dots (1);$$

vermöge der zweiten Bedingung muß sein:

$$xy : x^2 + y^2 = 30 : 61,$$

schreibt man für das zweite Glied seinen Werth aus (1), so ist

$$xy : x(2y + 1) = 30 : 61;$$

wird das erste Verhältniß durch x dividirt, und die Produkte der äußern und mittlern Glieder genommen, so hat man:

$$61y = 60y + 30, \text{ und daraus } y = 30;$$

wird dieser Werth in (1) eingeführt, so ist

$$x^2 + 900 = 61x,$$

und diese Gleichung completirt, giebt

$$x^2 - 61x + \left(\frac{61}{2}\right)^2 = \frac{61^2}{4} - 900 = \frac{3721 - 3600}{4} = \frac{121}{4},$$

mithin

$$x = \frac{61}{2} \pm \frac{11}{2}, \text{ und } x = 36, \text{ oder } = 25;$$

die gesuchten Zahlen sind also 36 und 30, oder 25 und 30.

9) Man soll zwei Zahlen im Verhältniß 4 : 5 finden; wird 6 zur größten, und 1 zur kleinsten gezählt, so sind die Quadratwurzeln dieser Summen um 1 von einander verschieden.

10) Die Zahl 5393 in zwei Quadrate zu zerlegen, deren Wurzeln um 28 von einander verschieden sind?

11) Es kauft Jemand ein Stück Tuch um 120 fl.; wären es 6 Ellen mehr gewesen, so hätte auch jede Elle einen Gulden weniger gekostet. Wieviel Ellen hielt das Stück?

12) Jemand kauft 39 Ellen Tuch von zweierlei Güte, und bezahlt dafür im Ganzen 120 fl.; er giebt aber für die Elle erster Qualität 3 fl. mehr, als für die andere. Wieviel Ellen von jeder Sorte hatte er gekauft?

13) Zwei Kaufleute A und B kauften, der eine 200, der andere 160 Ellen Tuch; A verkauft nun 4 Ellen mehr für 7 fl. als B für 6 fl.; da sie zusammen 196 fl. lösten, so ist die Frage, wie theuer ein jeder die Elle verkaufte?

14) Zwei Reisende A und B reisen zu gleicher Zeit aus den Städten C und D ab, um sich auf dem Wege zu begegnen. Bei der Zusammenkunft findet sich's, daß A 30 Stunden mehr zurückgelegt hat, als B, und daß A in 4 Tagen nach D käme; B aber, um nach C zu kommen, noch neun Tage auf dem Wege sein müßte. Wie groß ist die Entfernung der beiden Städte?

15) Zählt man zu den Zahlen 4, 5, 6, 7 die nämliche Zahl, so ist die Summe der Quadrate dieser Summen gleich 294. Welche Zahl muß addirt werden?

16) Es legt Jemand 1024 fl. auf Zinsen, und nach zwei Jahren zieht er mit Kapital und Zins aus Zinsen die Summe 1156. Wie groß ist der Zinsfuß?

17) Jemand muß nach Verlauf von drei Jahren die Summe von 1261 fl. bezahlen; er geht aber mit seinen Gläubigern einen Vertrag ein, kraft dessen er am Ende eines jeden Jahres 400 fl. zu bezahlen verspricht. Wieviel Prozent müssen gerechnet werden?

18) Es muß Jemand eine Summe von 820 fl. jetzt bezahlen; er verspricht aber seinem Gläubiger am Ende des Jahres 441 fl., und am Ende des zweiten Jahres noch einmal 441 fl. abzutragen. Wie hoch ist der Zinsfuß zu nehmen, damit der Schuldner nichts verliert?

19) Zwei Freunde A und B geben 600 Gulden in den Handel. Nach 12 Monaten zieht jeder an Gewinn und Kapital 400 fl.; da B sein Geld nur 7 Monate stehen ließ, wieviel wird jeder eingelegt haben?

20) Zwei Kaufleute A und B verkauften Tuch, und zwar A etwa 21 Ellen weniger als B, sie lösen aber zusammen 160 fl. Hätte nun A eben soviel Ellen gehabt als B, so würde er 105 fl. gelöst haben; hätte B aber die Anzahl der Ellen des A gehabt, so würde er 60 fl. empfangen haben; wieviel Ellen verkaufte jeder von ihnen?

21) Man soll das Vermögen dreier Freunde A, B, C aus folgenden Angaben bestimmen: So oft A fl. 5 hat, so oft besitzt B fl. 9, und C fl. 10; wird das Vermögen A durch B vervielfacht, und hierauf auch B durch C, und der Summe dieser Produkte noch die Summe des Vermögens aller drei addirt, so entsteht 8832. Wieviel besaß Jeder?

22) Es giebt eine Zahl, welche in die Hunderte fällt; werden die Quadrate der Ziffer, aus welchen die Zahl besteht, addirt, so ist 104 die Summe; das Quadrat der mittlern Ziffer ist um 4 Einheiten größer, als das doppelte Produkt aus den übrigen Ziffern; zieht man aber von der gesuchten Zahl 594 ab, so bleibt ein Rest, welcher aus denselben Ziffern

aber in umgekehrter Ordnung besteht. Welche Zahl ist es?

Aufl. Sind x , y , z die Ziffer, und zwar x die Einheiten, y die Zehner, und z die Hunderter; so sind folgende Gleichungen:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 104 \dots (1),$$

$$y^2 - 4 = 2 x z \dots (2),$$

$x + 10 y + 100 z - 594 = z + 10 y + 100 x$,
welche reducirt giebt

$$z - x = 6 \dots (3);$$

zieht man (2) von (1) ab und reducirt, so hat man

$$x^2 + 2 x z + z^2 = 100,$$

also, da $x^2 + 2 x y z + z^2 = (x + z)^2$ ist:

$$z + x = 10;$$

wird hiezu die Gleichung (3) addirt, so ist $2 z = 16$,
und $z = 8$; wird aber jene von dieser abgezogen,
so erhält man $2 x = 4$, mithin $x = 2$; werden diese
Werthe in (2) geschrieben, so ergibt sich

$$y^2 - 4 = 2 \cdot 8 \cdot 2 = 32,$$

mithin $y = 6$, und also 862 die Zahl.

23) Zwei solche Zahlen zu suchen, daß ihre Differenz zur Differenz ihrer Quadrate addirt, 150 giebt; daß aber ihre Summe zur Summe ihrer Quadrate gezählt, die Zahl 330 herauskömmt. Was sind's für Zahlen?

24) Ein Färber kauft zwei Sorten Indigo für 284 fl., und zwar 36 Pfund von der ersten, und 40 von der zweiten Sorte; ferner erhält er für 28 fl. ein Pfund mehr von der zweiten Sorte, als von der ersten. Wieviel Pfund hatte er für 28 fl. von jeder Sorte gekauft?

25) Einige Personen bilden eine Gesellschaft, und jede von ihnen giebt viermal soviel Geld, als Mitglieder darin sind; sie gewinnen mit 100 fl. den zehnten Theil der Einlage eines Individuums und 2 fl.; wird die Summe des Kapitals und des Gewinns durch 112 dividirt, so erhält man die Einlage eines jeden. Aus wieviel Mitgliedern bestand die Gesellschaft?

26) Die Zahl 112 in zwei Theile zu zerlegen, daß die Differenz der Quadrate dieser Theile, vermehrt um den neunten Theil der größern Zahl, und um ein Siebentel der kleinern, gerade der Zahl 210 gleich ist. Welche Theile sind es?

27) Zwanzig Personen, Herrn und Frauen, verzehrten, die Männer 24 fl., und die Frauen ebensoviel; es findet sich aber, daß jeder Herr einen Gulden mehr, als jede Frau verzehrt hatte. Wieviel waren Herrn und Frauen?

28) Zwei Individuen A und B legen 2000 fl. zusammen, und treiben damit Handel. Der erste läßt sein Geld 4 Monate stehen, und zieht sich nach dieser Zeit mit Kapital und Gewinn fl. 1760 zurück; der andere, der sein Geld nur 3 Monate stehen liefs, erhält die Summe fl. 2280 Kapital und Gewinn. Wie groß war die Einlage eines jeden?

29) Wenn die Zahl 524433 durch eine gewisse Zahl dividirt wird, so bleibt kein Rest; wird aber der Divisor um Zwei vermehrt, so wird der Quotient um 9 kleiner, als bei der ersten Division, und der Rest 293 bleibt. Wie groß ist der Divisor?

30) Man suche zwei Zahlen, deren Quadrate zusammen 585 ausmachen; zählt man aber zu ihrer Summe noch ihr Produkt, so entsteht 285.

31) Zwei Kaufleute haben 450 fl. gewonnen; der erste schloß 720 fl. auf 17 Monate her, der andere aber zieht an Einlage und Gewinn 624 fl. nach 12 Monaten; man suche den Gewinn eines jeden, und die Einlage des letztern.

§. 130.

Um eine Gleichung von der Form:

$$x^{2m} \pm ax^m = b$$

aufzulösen, setze man $x^m = y$, mithin $x^{2m} = y^2$, und die Gleichung verwandelt sich in eine zusammengetzte quadratische Gleichung

$$y^2 \pm ay = b,$$

welche aufgelöst giebt

$$y = \mp a \pm \sqrt{b + \frac{1}{4} a^2},$$

mithin

$$x = \sqrt[m]{\mp a \pm \sqrt{b + \frac{1}{4} a^2}}.$$

1) Man suche zwei Zahlen, deren Produkt 255, und die Summe ihrer Quadrate 514 ist. Welche Zahlen müssen es sein?

Aufl. Es sei x die eine Zahl, so ist die andere $\frac{255}{x}$, die Summe ihrer Quadrate

$$x^2 + \frac{65025}{x^2} = 514,$$

oder

$$x^4 + 65025 = 514 x^2,$$

und die aufzulösende Gleichung ist

$$x^4 - 514 x^2 = -65025;$$

für $x^2 = y$, hat man

$$y^2 - 514 y = -65025,$$

und hieraus

$$y = 257 \pm \sqrt{1024} = 257 \pm 32,$$

es ist also $y = 289$ oder $= 225$; daher

$$x^2 = 289, \text{ oder } = 225,$$

folglich $x = \sqrt{289} = 17$, und $x = \sqrt{225} = 15$; mithin die eine Zahl entweder 17, oder 15, die zweite Zahl also $\frac{255}{17} = 15$, oder $\frac{255}{15} = 17$; hieraus folgt, daß 15 und 17 die gesuchten Zahlen sind.

2) Wenn man zum Quadrate einer gewissen Zahl 12 zählt, und von demselben Quadrate 3 abzieht, so ist das Produkt der Summe in die Differenz gleich 52614.

3) Drei Personen A, B, C, haben eine Summe Geldes zu theilen, wovon A die Hälfte, und C das Dreifache des Antheils von B erhält; wenn man das Quadrat des Antheils A durch das Quadrat des Antheils B vervielfacht, und zur Summe das Quadrat des Antheils C zählt, so entsteht die Summe 534280. Wieviel erhielt jeder von der Summe?

4) Wenn man zur vierten Potenz einer gewissen Zahl den Bruch $\frac{144}{625}$ zählt, so ist die Summe, welche

man dadurch erhält, dem Quadrate der gesuchten Zahl gleich.

5) A und B haben ein Vermögen im Verhältniß von $2 : 1$. A kauft für 10 fl. ebensoviel Zucker, als er Gulden besitzt, und verkauft 8 Pfund zu 1 fl. B kauft soviel Kaffee für 10 fl., als er Gulden besitzt, und verkauft 400 Pfund für soviel Gulden, als er Pfund Kaffee gekauft hatte; er gewinnt durch diesen Absatz 31,75 fl. mehr als A für seinen Zucker. Wieviel Geld hatte jeder?

6) Man soll zwei Zahlen suchen, wovon die eine das Doppelte der andern ist; zählt man 16 zum Cubus der größern, und multiplicirt diese Summe durch den Cubus der kleinern, so ist 6264 das Produkt.

7) Es kauft Jemand Ochsen und bezahlt für jeden ebensoviel Gulden, als er Ochsen kaufte, und gewinnt daran ebensoviel Procente, als Einheiten im Ankaufspreise für einen Ochsen enthalten sind. Zählt man 20 zum Gewinne, so ist die Quadratwurzel aus der Summe dem achten Theile des Gewinnes gleich. Wieviel Ochsen wurden gekauft?

8) Man soll zwei Zahlen suchen, deren vierte Potenzen zusammengenommen 97, und ihre achten Potenzen die Zahl 6817 machen.

9) Eine Zahl zu suchen, welche 81mal zu ihrer neunten Potenz gezählt, eine Summe giebt, welche 82mal der fünften Potenz der Zahl gleich ist.

10) Zwei Zahlen zu finden, deren Produkt 8; wenn die Summe ihrer fünften Potenzen um das 16fache ihrer Cuben vermehrt wird, so hat man 368mal die Summe der Zahlen.

Zehntes Kapitel.

Von den Progressionen.

§. 131.

Man versteht unter einer *Progression* eine solche Reihenfolge von Gröſſen, welche nach einem bestimmten Gesetze fortschreiten, daſs entweder alle Glieder um denselben Unterschied, oder um ein gleiches Vielfache von einander verschieden sind. Jene Zahlenreihe, in welcher je zwei auf einander folgende Glieder um denselben *Unterschied* von einander abstehen, heisst *arithmetische Progression*, in welcher drei unmittelbar aufeinander folgende Glieder eine stetige arithmetische Proportion geben, wie z. B. 4, 7, 10, 13, 16, ... Stehen hingegen je zwei Glieder einer Zahlenreihe um das nämliche Vielfache voneinander ab, so hat man eine *geometrische Progression*; dieses Vielfache wird auch der *Exponent* der Progression genannt. Auch hier bilden drei unmittelbar sich folgende Glieder eine stetige geometrische Proportion. Beide Arten von Progressionen sind *wachsend*, oder *abnehmend*, je nachdem die Glieder zu- oder abnehmen.

§. 132.

Bezeichnen a das erste, u das letzte Glied, n die Anzahl der Glieder, und d den gemeinschaftlichen Unterschied einer arithmetischen Progression, und $b, c, e, f, \dots$ die folgenden Glieder, so muſs nach dem Begriffe einer solchen Progression sein:

$$b = a + d$$

$$c = b + d = a + 2d$$

$$d = c + d = a + 3d$$

$$u = t + d = a + (n - 1)d$$

Das letzte Glied einer arithmetischen Proportion ist also gleich der Summe des ersten Gliedes und des gemeinschaftlichen Unterschieds, vervielfacht durch die Anzahl der vorhergehenden Glieder.

Es sei $a = 7$, $d = 5$, und $n = 9$, so ist das neunte Glied dieser Reihe

$$u = 7 + (9 - 1) 5 = 7 + 8 \cdot 5 = 47;$$

wenn $a = 4\frac{1}{2}$, $d = -\frac{1}{2}$, $n = 8$, so ist die Progression abnehmend, und ihr achtes Glied

$$u = 4\frac{1}{2} - 7 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2} - \frac{7}{2} = 1.$$

§. 133.

Aus dem Werthe für u lassen sich leicht auch die Werthe für a , d , n ableiten, nämlich

$$1) a = u - (n - 1) d;$$

$$2) d = \frac{u - a}{n - 1};$$

$$3) n = \frac{u - a + d}{d} = \frac{u - a}{d} + 1.$$

Man soll zwischen 1 und 2 zehn Glieder einschalten. Hier bedarf es nur der gemeinschaftlichen Differenz; bedient man sich also der Formel (2), und bemerkt, daß $a = 1$, $u = 2$, und $n = 12$, so hat man

$$d = \frac{2 - 1}{12 - 1} = \frac{1}{11},$$

mithin die Progression $1, 1\frac{1}{11}, 1\frac{2}{11}, 1\frac{3}{11}, 1\frac{4}{11}, 1\frac{5}{11}, 1\frac{6}{11}, 1\frac{7}{11}, 1\frac{8}{11}, 1\frac{9}{11}, 1\frac{10}{11}, 2$.

§. 134.

Schreibt man über die Glieder einer arithmetischen Reihe die Zeiger $0, 1, 2, 3, \dots, m$, so erhält man jedes Glied, wenn man zum Produkte aus seinem Zeiger in die gemeinschaftliche Differenz das erste Glied zählt.

Kennt man nun zwei Glieder u und u' , wie auch ihre entsprechenden Zeiger n und n' ; so läßt sich immer der Zeiger x finden, welcher in einer arithme-

tischen Progression dem Gliede *Null* entspricht; denn man hat:

$$u = a + n d \dots (1),$$

$$u' = a + n' d \dots (2),$$

$$0 = a + x d \dots (3);$$

aus der Gleichung (3) bestimme man $d = -\frac{a}{x}$, und

führe diesen Werth in (1) und (2) ein, dividire hierauf (1) durch (2), so entsteht

$$\frac{u}{u'} = \frac{a - n \frac{a}{x}}{a - n' \frac{a}{x}} = \frac{x - n}{x - n'},$$

wird hieraus x entwickelt, so erhält man

$$x = \frac{u n' - u' n}{u - u'},$$

d. h. man findet den Zeiger des Gliedes *Null* einer arithmetischen Progression, wenn zwei Glieder derselben mit ihren Zeigern gegeben sind, indem man die Glieder verkehrt durch die Zeiger vervielfacht, und die Differenz dieser Produkte durch die Differenz der Glieder dividirt.

Es seien 5 und 14 die Zeiger, denen die Glieder 65 und 20 entsprechen; man verlangt den Zeiger des Gliedes 0. Hier ist $u = 65$, $u' = 20$, $n = 5$, $n' = 14$, daher

$$x = \frac{65 \cdot 14 - 20 \cdot 5}{65 - 20} = \frac{810}{45} = 18.$$

§. 135.

Jede einfache Gleichung läßt sich auf die Form $A x \pm B = 0$ zurückbringen; werden nun für x nach und nach alle natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3, ... geschrieben, so führt die vorige Formel zu einer arithmetischen Progression, deren erstes Glied B , der gemeinschaftliche Unterschied A , und die Werthe für x die Zeiger sind. Werden nun für x irgend zwei Zahlen n und n' genommen, und die Resultate bemerkt, welche u und u' sind; so läßt sich, vermöge

des vorigen Paragraphs der Zeiger x finden, für welchen die Formel $Ax \pm B$, Null wird.

Dieses Verfahren ist bei Gleichungen von höhern Graden nicht mehr ganz sicher; indess findet man durch Wiederholung desselben Geschäfts auch für höhere Gleichungen sehr annähernde Wurzeln. Man nennt das Verfahren die *Regel des falschen Satzes* (*regula positionis falsae*), weil nämlich willkührliche Werthe für x angenommen werden.

§. 136.

Man bezeichne durch S die Summe aller Glieder $a, b, c, e, \dots, p, q, r, u$ einer arithmetischen Progression, so daß

$$S = a + b + c + e + \dots + p + q + r + u;$$

schreibt man dieselbe Gleichung, nur die Gröfsen auf der rechten Seite in umgekehrter Ordnung, so hat man, weil dadurch im Werthe von S nichts geändert wird;

$$S = u + r + q + p + \dots + e + c + b + a;$$

werden diese beiden Gleichungen zusammengezählt, so entsteht die Summe

$$2S = (a + u) + (b + r) + (c + q) + (e + p) + (p + e) + (q + c) + (r + b) + (u + a).$$

Da nun $b = a + d$, und $r = u - d$ (§§. 132, 133) so ist $(b + r) = (a + u)$; ferner $c = b + d$, $q = r - d$; also $(c + q) = (b + r) = (a + u)$; hieraus erhellet, daß alle diese Summen $(a + u)$, $(b + r)$, $(c + q)$, $(e + p)$ wechselseitig gleich und ebensoviel sind, als die gegebene Progression Glieder hat; folglich

$$2S = (a + u)n,$$

woraus sich ergibt:

$$1) S = \frac{(a + u)n}{2};$$

sind also das erste und letzte Glied, wie auch die Anzahl der Glieder einer arithmetischen Progression gegeben, so erhält man die Summe aller Glieder, wenn man

die Summe des ersten und letzten durch die halbe Anzahl der Glieder vervielfacht.

Wäre $a = 5$, $u = 23$, und $n = 7$, so hätte man

$$1) S = \frac{(5 + 23) 7}{2} = \frac{28 \cdot 7}{2} = 14 \cdot 7 = 98.$$

Führt man in die vorige Formel den Werth $a + (n - 1) d$ für u aus §. 132 ein, so verwandelt sie sich, nach geschehener Reduktion in folgende:

$$2) S = \frac{[2 a + (n - 1) d] n}{2}.$$

Schreibt man in die Formel (1) den Werth $a = u - (n - 1) d$, so ist

$$3) S = \frac{[2 u - (n - 1) d] n}{2}.$$

§. 137.

Man setze nun $a = 1$, und $d = 1$, so erhält man die natürliche Zahlenreihe $1, 2, 3, \dots$, wo u in n übergeht; durch diese Werthe verwandelt sich die Gleichung (2) des vorigen §s. in folgende:

$$1) S = \frac{(1 + n) n}{2}.$$

Wird die Summe der ersten 1000 Zahlen verlangt, so ist $n = 1000$, und $S = \frac{1001 \times 1000}{2} = 500500.$

Macht man ferner $a = 1$, $d = 2$, so entsteht die Reihe der ungraden Zahlen $1, 3, 5, 7, \dots$, deren Summe durch folgende Formel ausgedrückt wird, wenn man die Werthe in die Formel (2) des vorigen Paragraph's einführt:

$$2) S = \frac{[2 + (n - 1) 2] n}{2} = n^2,$$

d. h. man erhält die Summe aller ungraden Zahlen, wenn man die Anzahl derselben zum Quadrate erhebt; wollte man, z. B., die Summe der 10 ersten ungraden Zahlen wissen, so hat man $S = 10^2 = 100.$

Wird ferner $a = 0$, und $d = 2$ angenommen, so ergiebt sich die Reihe der graden Zahlen, zu wel-

d. h. das letzte Glied einer geometrischen Progression ist gleich dem Produkte aus dem ersten Gliede in diejenige Potenz des Exponenten, welche durch die Anzahl der vorangehenden Glieder angezeigt wird.

Es seien $a = 7$, $e = 5$, $n = 8$, folglich
 $u = 7 \times 5^{8-1} = 7 \times 5^7 = 7 \times 78125 = 546875$.

Wäre aber $a = 546875$, und $e = \frac{1}{5}$, so hätte man in einer abnehmenden Progression

$$u = \frac{546875}{5^7} = 7.$$

Aus der Gleichung (1) folgen unmittelbar die Werthe

$$2) a = \frac{u}{e^{n-1}}; \quad 3) e = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}.$$

Die Anzahl der Glieder einer geometrischen Reihe läßt sich auf diesem Wege nicht finden; wir verweisen daher auf § 154.

Mit Hilfe der Formel (3) lassen sich zwischen zwei gegebenen Zahlen soviel als man will einschalten, so daß die Anzahl der Glieder n immer in $n + 2$ verwandelt wird; der Exponent e ist alsdann die $n + 1$ Wurzel aus dem Bruche $\frac{u}{a}$, wo immer n die Anzahl der einzu-

schaltenden Glieder andeutet. Wollte man 5 Glieder zwischen 1 und 2 einschalten, so müßte man $a = 1$, $u = 2$, und für n die Zahl $5 + 2 = 7$ setzen, und man wird

haben $e = \sqrt[5+1]{\frac{2}{1}} = \sqrt[6]{2} = 2^{\frac{1}{6}}$, und die Progression ist
 $1, 2^{\frac{1}{6}}, 2^{\frac{2}{6}}, 2^{\frac{3}{6}}, 2^{\frac{4}{6}}, 2^{\frac{5}{6}}, 2 \dots \dots$

§. 140.

Weil in einer jeden geometrischen Progression drei unmittelbar aufeinander folgende Glieder eine stetige geometrische Proportion bilden, so ist

$a : ae = ae : ae^2 = ae^2 : ae^3 = ae^3 : ae^4 = \dots = ae^{n-2} : ae^{n-1}$;
 nimmt man die Summe aller Vorderglieder wie auch aller Hinterglieder, so ist (§. 108.):

$$a + ae + ae^2 + ae^3 + \dots + ae^{n-2} + ae^{n-1} = a : ae = 1 : e;$$

bezeichnet man durch S die Summe aller Glieder von a bis ae^{n-1} , so enthält das erste Glied des ersten Verhältnisses voriger Proportion die Summe aller Glieder, nur das letzte ae^{n-1} nicht, man kann also $S - ae^{n-1}$ statt jenes Gliedes schreiben; das zweite Glied desselben Verhältnisses enthält alle Glieder der gegebenen Reihe, nur das erste a nicht, folglich kann man $S - a$ setzen; werden nun diese Werthe in obige Proportion eingeführt, so verwandelt sie sich in folgende:

$$S - ae^{n-1} : S - a = 1 : e,$$

hieraus ergibt sich

$$e S - ae^n = S - a;$$

entwickelt man hieraus den Werth für S , so hat man

$$S = \frac{a(e^n - 1)}{e - 1}, \dots\dots (1),$$

welche Formel leicht in Worten auszudrücken ist. Ist $a = 1$, $e = 2$, und $n = 8$, mithin die Progression 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, deren Summe, da $2^8 = 256$, sein wird: $S = \frac{1 \cdot (2^8 - 1)}{2 - 1} = (256 - 1) = 255$.

§. 141.

Schreibt man in die Formel (1) den Werth $u = ae^{n-1}$, indem $S = \frac{ae^n - a}{e - 1} = \frac{ae^{n-1} \times e - a}{e - 1}$, so hat man

$$S = \frac{eu - a}{e - 1} \dots\dots (2).$$

Wird hier $\frac{u}{e^{n-1}}$ für a geschrieben, so ist:

$$S = \frac{eu - \frac{u}{e^{n-1}}}{e - 1} = \frac{u(e^n - 1)}{e^{n-1}(e - 1)} \dots (3).$$

Wenn $u = 5120$, $e = 4$, $n = 6$, so ist $e^n = e^6 = 4096$, $e^{n-1} = e^5 = 1024$, und $e - 1 = 3$, folglich

$$S = \frac{5120(4096 - 1)}{1024 \times 3} = 5 \times 1365 = 6825.$$

Um nun auch die Formel für die Summe einer abnehmenden geometrischen Reihe zu finden, sei $e = \frac{m}{x}$, wodurch man aus (2) erhält:

$$S = \frac{u \times \frac{m}{x} - a}{\frac{m}{x} - 1} = \frac{mu - ax}{m - x} \dots\dots (4);$$

setzt man hierin $m = 1$, so ist $e = \frac{1}{x}$, folglich

$$S = \frac{u - ax}{1 - x} \dots\dots (5).$$

Es sei $a = 3$, $x = 2$, $n = 5$, so ist die Progression selbst

$$3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16},$$

und ihre Summe

$$S = \frac{\frac{3}{16} - 6}{1 - 2} = \frac{3 - 96}{-16} = \frac{-93}{-16} = 5 \frac{13}{16}.$$

Wollte man zu dieser Progression noch das Glied $\frac{3}{32}$ setzen, so wäre $5 \frac{29}{32}$ die Summe der Glieder. Da der Zähler 3 aller Brüche, welche Glieder der vorigen Reihe sind, beständig, der Nenner aber veränderlich ist, so werden die Glieder immer kleiner, je weiter man sich von dem Anfange entfernt. Eine solche Reihe wird eine *convergirende* genannt.

Wird in (5) $a = e = \frac{1}{x}$ gesetzt, so hat man die allgemeine Formel für eine Bruchreihe

$$S = \frac{u - 1}{1 - x} \dots\dots (6).$$

Da hier u das letzte Glied bezeichnet, und ein Bruch $\frac{1}{x^n}$ ist, so kann man n unendlich groß an-

nehmen, so daß der Werth des Bruches $\frac{1}{x^n}$ unendlich klein werden muß, und in Betracht der Einheit als Null angesehen werden kann, in diesem Falle wird die Formel (6)

$$S = \frac{1}{x - 1} \dots\dots (7).$$

Wäre $x = 2$, so hätte man die Reihe $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ und die Summe dieser Reihe ist beiläufig 1; die Summe kann also nie gröfser als 1 werden, delfswegen heifst 1 die *Gränze* dieser Bruchreihe.

Wäre $x = 3$, so fände man $S = \frac{4}{3}$, und diefs ist der Flächenraum eines Parabelsegments, in welches das gröfste Dreieck 1 eingeschrieben ist (Geometrie §. 469.).

Wird in der Formel (4) der Werth $\frac{a}{x^{n-1}}$ für u , und $m = 1$ gesetzt, so hat man

$$S = \frac{ax}{x-1} \left(1 - \frac{1}{x^n}\right) \dots \dots (8);$$

wenn n unendlich grofs ist, so wird diese Gleichung beiläufig $S = \frac{ax}{x-1}$.

Mit Hilfe dieser letztern Formel läfst sich leicht der Urbruch eines periodischen Decimalbruchs angeben. Es sei $0,333\dots$, so bilden die Decimalziffer eine geometrische abnehmende Reihe

$$\frac{3}{10}, \frac{3}{100}, \frac{3}{1000}, \dots \dots \frac{3}{10^n};$$

die Gränze der Summe aller Glieder ist daher

$$\frac{ax}{x-1} = \frac{3}{10} \times \frac{10}{9} = \frac{1}{3}.$$

Welchem Urbruche entspricht die Periode $0,142857142857\dots$? Es ist für diesen Fall $a = 0,142857$, und $x = 1000000$, also

$$\frac{ax}{x-1} = \frac{0,142857 \times 1000000}{999999} = \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}.$$

Für einen gemischten periodischen Decimalbruch $0,861111\dots$, $a = 0,001$, und $x = 10$,

$$\text{also } \frac{ax}{x-1} = \frac{0,001 \times 10}{9} = \frac{1}{900}, \text{ folglich der}$$

Werth des ganzen Decimalbruchs

$$0,861111\dots = \frac{86}{100} + \frac{1}{900} = \frac{775}{900} = \frac{31}{36}.$$

§. 142.

Wäre der Exponent $e = 1$, so müfste $u = a \times \times 1^{n-1} = a$, und $S = \frac{a-a}{1-1} = \frac{0}{0}$ sein; nun hat aber

die Progression $a, a, a, \dots$ zur Summe den Ausdruck na ; es ist also der Werth $\frac{a}{n}$ unbestimmt. Um in solchen Fällen den wahren Werth des Bruchs zu bekommen, so muß man bemerken, daß $\frac{a}{n}$ nur dadurch entstehen kann, wenn im Zähler und Nenner der nämliche Faktor vorkömmt, welcher beide Theile des Bruchs zu Null macht. Kann dieser gemeinschaftliche Faktor entfernt werden, so erhält man für den Bruch einen bestimmten Werth. Wie in solchen Fällen der Werth des Bruchs zu finden sei, ist in meiner Uebersetzung von *Boucharlat's* Differenzial- und Integralrechnung pag. 51, sqq. auseinandergesetzt.

§. 143.

Aufgaben über geometrische Progressionen.

1) In einer geometrischen Progression von 5 Gliedern, welche die Summe 242 ausmachen, wird die Summe der äußern Glieder durch das mittlere Glied dividirt, und es ergiebt sich der Quotient $9\frac{1}{9}$. Was ist dieß für eine Progression?

2) Sieben Zahlen sind in geometr. Progression; die 6 ersten machen zusammen $157\frac{1}{2}$, die 6 letzten aber 315. Was ist dieß für eine Progression?

3) In einer geom. Progression ist das Produkt der äußern Glieder 576; die Summe der Quadrate der beiden ersten Glieder 45; und die Summe der Quadrate der beiden letzten Glieder 46080. Es werden das erste und letzte Glied dieser Progression gesucht?

4) In einer geom. Progression von einer ungeraden Anzahl Glieder ist 140 die Summe des ersten und mittlern Gliedes; 3780 die Summe des mittlern und letzten Gliedes; wird der Exponent um 5462 erhöht, so erhält man eine Zahl, welche der Summe aller Glieder der gesuchten Progression gleich ist. Welche Summe ist es?

5) In einer geom. Progression ist die Summe der beiden äußern Glieder 513; die Summe des zweiten und vorletzten Gliedes 258; die Summe des dritten und vorvorletzten Gliedes 132. Wie groß ist die Summe aller Glieder?

6) Die Zahl 1093 in eine geom. Progression zu zerlegen, dafs 730 die Summe der äufsern Glieder sei; wenn aber der Unterschied derselben Glieder um den Exponenten erhöht wird, so erhält man 731. Welche Progression ist es?

7) Man soll 4 Zahlen in arithm. Progression finden; werden diesen 4 Zahlen 1, 5, 25, 93 zugezählt, so sind die 4 Summen Glieder einer geometrischen Progression.

8) In zwei Progressionen von 4 Gliedern, einer arithmetischen und einer geometrischen, sind die ersten Glieder gleich; das zweite Glied der zweiten Progression enthält das zweite Glied der erstern $1\frac{1}{2}$ mal; das dritte Glied der zweiten enthält das dritte Glied der erstern $2\frac{2}{5}$ mal; die Summe der äufsern Glieder der geometr. Progression ist 81. Welche Progressionen sind es?

9) Eine geom. Progression von 4 Gliedern soll gesucht werden; das dritte Glied, vermindert um die Summe der beiden ersten giebt 2, und das vierte Glied, um die Summe der beiden mittlern Glieder vermindert, giebt 4. Welche Progression ist es?

Elftes Kapitel.

Von den Logarithmen.

§. 144.

Unter *Logarithmen* sind die verschiedenen Exponenten zu verstehen, welche man einer beständigen Gröfse — *Grundzahl* — giebt, um daraus alle möglichen Zahlen herzuleiten. Ist diese unveränderliche Gröfse die Zahl 10, so hat man die *gewöhnlichen Logarithmen*, und wenn jene ausgewählt werden, welche im Systeme der Zahl 10 nur den ganzen natürlichen Zahlen entsprechen, so heifst diese Sammlung das *System der gewöhnlichen (Briggischen) Logarithmen*. Es giebt also sovieler logarithmische Systeme, als Grundzahlen denkbar sind.

Es leuchtet von selbst aus dem gegebenen Begriffe der Logarithmen ein, dafs, so lange die Grundzahl positiv ist, den negativen Zahlen keine Logarithmen entsprechen können, weil unmöglich eine positive Zahl, zu irgend einer Potenz erhoben, negativ werden kann.

§. 145.

Wir wollen uns nun damit beschäftigen, jene Exponenten der Grundzahl 10 zu bestimmen, welchen ganze natürliche Zahlen entsprechen. Zu diesem Ende erheben wir nach und nach die Grundzahl zu den Potenzen der Exponenten 0,1; 0,01; 0,001; . . .

Man hat

$$10^{0,1} = 10^{\frac{1}{10}} = 10^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}} = \sqrt[5]{10};$$

es muß also hier zuerst die fünfte Wurzel aus 10, und aus dieser wiederum die Quadratwurzel gezogen werden. Beschäftigen wir uns nun zuerst mit $\sqrt[5]{10}$, welches Geschäft wir mit Zuziehung des §. 134 verrichten wollen. Man setze daher willkürlich die fünfte Wurzel aus 10 gleich $x = 1,6$, wodurch man erhält

$$(1,6)^5 = 10,48576,$$

woraus erhellet, daß die Wurzel 1,6 zu groß ist; der Unterschied ist $-0,48576 = u$. Nimmt man nun $x = 1,58$, so ist $(1,58)^5 = 9,8465804$; der Unterschied $0,1534196 = u'$; vervielfacht man nun u durch $x = 1,58$, u' durch $x = 1,6$, und subtrahirt die Produkte, welche Differenz durch $u - u' = 1,6 - 1,58$ dividirt werden muß, so erhält man

$$\frac{un' - u'n}{u - u'} = \frac{1,01297}{0,63918} = 1,58479 \dots,$$

welcher Werth der Wurzel schon sehr nahe kömmt.

Man setze nun zuerst $x = 1,5848$, und dann $x = 1,5849$; wird das eben angezeigte Geschäft für diese Werthe wiederholt, so erhält man sehr nahe

$$\sqrt[5]{10} = 1,584893188 \dots,$$

welcher nämlich erst in der neunten Decimalstelle von dem wahren Werthe abweicht; wird nun aus dieser die Quadratwurzel gezogen, so hat man

$$10^{\frac{1}{10}} = 1,258925411794 \dots$$

§. 146.

Um den Werth von $10^{0,01}$ zu erhalten, setze man

$$10^{0,01} = 10^{\frac{1}{100}} = 10^{\frac{1}{10}} \times 10^{\frac{1}{10}} = \sqrt[5]{1,258925411794}.$$

Nimmt man $x = 1,04$, so ist $(1,04)^5 = 1,2166529$, und daher $u = 0,0422725$. Für einen andern Werth $x = 1,05$ erhält man $(1,05)^5 = 1,2762815$, mithin $u' = -0,01735609$, folglich $u - u' = 0,0596234$, $un' - u'n = 0,062427301 \dots$, und nach geschehener Division ist die fünfte Wurzel aus $10^{\frac{1}{10}} = 1,04709 \dots$

Für andere Werthe $x = 1,047$, und $x = 1,0471$ ergibt sich durch Anwendung desselben Verfahrens

$\sqrt[5]{10^{0,1}} = 1,047128548091\dots,$
und daraus die Quadratwurzel gezogen, ist
 $10^{0,01} = 1,023292992281\dots$

§. 147.

Das vorige Verfahren mag hinreichen, um auch die $0,001; 0,0001; 0,00001; \dots$ Potenz der Grundzahl 10 zu bilden. Wir wollen hier in beifolgender Tafel diese Potenzen geben, bis die Einheit in der zwölften Decimalstelle steht, nämlich:

Decimalstelle, in welcher die Einheit als Exponent steht.	Potenzen der Grundzahl 10.
1	1,258925 411794
2	1,023292 992281
3	1,002305 238078
4	1,000230 285021
5	1,000023 026116
6	1,000002 302589
7	1,000000 230259
8	1,000000 023026
9	1,000000 002303
10	1,000000 000230
11	1,000000 000023
12	1,000000 000002

Mit Hilfe dieser Tafel ist man nun im Stande zu berechnen :

$10^{0,9} = 10^{1-0,1} = \frac{10}{10^{0,1}};$
 $10^{0,8} = 10^{0,9-0,1} = \frac{10^{0,9}}{10^{0,1}};$
 $10^{0,7} = 10^{0,8-0,1} = \frac{10^{0,8}}{10^{0,1}};$

$$10^{0,6} = 10^{0,7-0,1} = \frac{10^{0,7}}{10^{0,1}};$$

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Ganz auf dieselbe Weise werden die Potenzen von 10 gebildet, wenn die Exponenten, Hundertel, Tausendtel, ... sind.

Werden nun alle möglichen Verbindungen der Ziffer 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 zu sieben Ziffer gebildet, so erhält man alle möglichen Potenzen der Zahl 10, deren Exponenten ächte Decimalbrüche sind.

Werden nun alle diese Potenzen nach und nach noch durch $10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7, \dots$ vervielfacht, und jene herausgehoben, welche die Glieder der natürlichen Zahlenreihe bilden, so hat man das logarithmische System der Grundzahl 10 für 7 Decimalstellen.

§. 148.

Indefs lassen sich die Logarithmen der natürlichen Zahlen auch auf folgende Art entwickeln. Man bestimme z. B.

$$2 = 10^x;$$

weil x zwischen 0 und 1 liegen muß, setze man

$0 + \frac{1}{x'}$ für x , wodurch man erhält

$$2 = 10^{0 + \frac{1}{x'}} = 10^{\frac{1}{x'}} = \sqrt[x']{10},$$

und daraus ergibt sich

$$2^{x'} = 10.$$

Da nun $2^3 = 8$, und $2^4 = 16$, so fällt x' zwischen 3 und 4, man mache also $x' = 3 + \frac{1}{x''}$, wodurch sich ergibt

$$2^{3 + \frac{1}{x''}} = 10, \text{ oder } 8 \times 2^{\frac{1}{x''}} = 10;$$

wird durch 8 dividirt, so ist

$$2^{\frac{1}{x''}} = \frac{5}{4}, \text{ also } 2 = \left(\frac{5}{4}\right)^{x''}.$$

Durch einen leichten Versuch überzeugt man sich, daß x'' zwischen 3 und 4 fallen muß, denn es ist

$$\left(\frac{5}{4}\right)^3 = \left(\frac{125}{64}\right) < 2, \text{ und } \left(\frac{5}{4}\right)^4 = \left(\frac{625}{256}\right) > 2;$$

aus diesem Grunde setze man nun $3 + \frac{1}{x'''} \text{ für } x'', \text{ so ist}$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{3 + \frac{1}{x'''}} = 2,$$

oder auch $\left(\frac{5}{4}\right)^3 \times \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{x'''}} = 2,$

woraus durch Division mit $\left(\frac{5}{4}\right)^3$ sich ergibt:

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{x'''}} = \frac{228}{125},$$

und daraus wiederum

$$\left(\frac{5}{4}\right) = \left(\frac{228}{125}\right)^{x'''}.$$

Der Exponent x''' muß zwischen 9 und 10 liegen; deshalb setze man $9 + \frac{1}{x''''}$ statt x''' , und weil ferner der Nenner x'''' sich zwischen 2 und 3 befindet, so sei $2 + \frac{1}{x''''}$ für x'''' , u. s. w. Nun vernachlässige

man den Bruch $\frac{1}{x''''}$, so ist:

$$x'''' = 2,$$

$$x''' = 9 + \frac{1}{2},$$

$$x'' = 3 + \frac{1}{9 + \frac{1}{2}},$$

$$x' = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{9 + \frac{1}{2}}},$$

und zuletzt:

$$x = 0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{2} \dots$$

Der Exponent der Grundzahl 10, welcher der Zahl 2 entspricht, ist also ein Kettenbruch, dessen Quotienten 3, 3, 9, 2 ... sind; bildet man den Näherungswerth nach §. 65., so ergibt sich,

$$\frac{59}{196} = 0,30102 \dots,$$

folglich

$$2 = 10^{0,30102 \dots}$$

Es ist von selbst einleuchtend, daß nur die Logarithmen der Primzahlen gebildet werden müssen; denn kennt man die Logarithmen von 2 und 3, so lassen sich die Logarithmen derjenigen Zahlen bilden, welche vielfache von 2 und 3 sind. So hat man für die Zahl $4 = 2^2$

$$2^2 = (10^{0,30103})^2 = 10^{0,60206};$$

für $16 = 2^4$ hat man

$$16 = (10^{0,60206})^2 = 10^{1,20412}.$$

§. 149.

Diejenige Zahl, welche an der Stelle der Ganzen derjenigen Decimalbrüche, welche Logarithmen genannt werden, steht, heißt *Kennziffer* — *Charakteristik* — und die Decimalziffer *Mantissen*; weil nämlich jene ganze Zahl anzeigt, zu welcher Periode die Zahl gehört, welcher ein gegebener Logarithmus entspricht. Es gelten für solche Fälle folgende Regeln:

1) Die *Charakteristik* eines Logarithmen muß eine *Einheit* weniger enthalten, als die Zahl, zu welcher der Logarithmus gehört, Ziffer enthält. Die *Charakteristik* der einfachen Einheiten ist daher Null; für die Zehner 1, für die Hunderter 2, für die Tausender 3, u. s. w. Der Beweis hievon ist nicht schwer.

2) Ist umgekehrt die Zahl zu suchen, welche einem gegebenen Logarithmus entspricht, so müssen so viele ganze Ziffern in der Zahl sein, als die *Charakteristik* des Logarithmus, um eine Einheit erhöht, anzeigt. Die Zahl also, welche dem Logarithmen 3,7804723 entspricht, fällt in die Periode der Tausende.

§. 150.

Nimmt man die Exponenten der Grundzahl 10 negativ, so hat man: $10^{-1} = \frac{1}{10}$; $10^{-2} = \frac{1}{10^2}$; die Brüche, welche zwischen -1 und -2 , zwischen -2 und -3 , . . . liegen, sind *negative Logarithmen*, welche also immer ächten Brüchen entsprechen. Alle negativen Logarithmen lassen sich jedoch in einer positiven Form darstellen; hätte man nämlich den Logarith-

mus $-1,3979400$, so entspricht dieser die Zahl $x =$
 $= 10^{-1,3979400} = \frac{1}{10^{1,3979400}}$; vervielfacht man Zähler

und Nenner dieses Bruchs durch 10^2 , so hat man

$$\frac{10^2 - 1,3979400}{10^2} = \frac{10^{0,6020600}}{10^2}.$$

Man sucht also die Zahl, die dem Logarithmen $0,6020600$ entspricht, welche zwischen 1 und 10 liegen muß; dividirt man durch $10^2 = 100$, d. h. schneidet man von der Rechten zur Linken so viele Decimalstellen ab, als Nullen im Nenner sein müßten; so ist für den vorliegenden Fall $10^{0,6020600} = 4$, mithin $x =$
 $= 0,04$. Gewöhnlich schreibt man den Exponenten des Nenners 10^2 hinter die Mantissen, so daß $10^{0,6020600-2}$
 $= 0,04$.

Die Umformung negativer Logarithmen in positive, mit angehängter negativen Kennziffer, ist dann von erheblichem Nutzen, wenn man in den Fall kömmt, Logarithmen von andern abziehen zu müssen. Wie es möglich werden kann, daß Logarithmen von andern abzuziehen sind, soll im Folgenden gezeigt werden.

§. 151.

Es seien a, b, c, d vier Zahlen, die in geometrischer Proportion stehen, und v, x, y, z die Exponenten der Zahl 10, so daß $a = 10^v$; $b = 10^x$; $c = 10^y$, und $d = 10^z$; man hat daher, vermöge der gegebenen Proportion $a : b = c : d$, folgende:

$$10^v : 10^x = 10^y : 10^z;$$

nimmt man hier die Produkte der äußern und mittlern Glieder, so ist

$$10^{v+z} = 10^{x+y},$$

d. h. wenn die Grundzahl 10 zur $x + y$ Potenz erhoben wird, so ist diese Zahl die nämliche, als wenn die Grundzahl 10 zur Potenz $v + z$ erhoben wird, was aber nicht anders möglich ist, als wenn

$$v + z = x + y;$$

wird nun jeder Logarithmus durch *log.* angedeutet, so hat man

$\log. a + \log. d = \log. b + \log. c$;
da aber zwei gleiche Summen in eine arithmetische Proportion aufgelöst werden können, so ist

$\log. a \div \log. b = \log. c \div \log. d$;
vergleicht man diese Proportion mit der geometrischen:
 $a : b = c : d$, so folgt, *dass die Logarithmen von 4 Zahlen, welche in geometrischer Proportion sind, der Ordnung nach in arithmetischer Proportion stehen; fehlt also eines der Glieder jener, so ist auch sein Logarithmus in dieser unbekannt; er wird also nach §. 100. Art. 2. gefunden werden.*

§. 152.

Da bei Vervielfachung der Potenzen derselben Grundgröſſe die Exponenten der Faktoren addirt werden, so folgt:

1) *Der Logarithmus eines Produkts ist der Summe der Logarithmen der Faktoren gleich. Findet sich also umgekehrt eine Summe von Logarithmen angezeigt, so setzt man die Gröſſen als Faktoren in ein Produkt, und diesem das Zeichen log. vor. Man hat daher*

$\log. abcd = \log. a + \log. b + \log. c + \log. d$;
mithin auch umgekehrt:
 $\log. 93 + \log. 704 + \log. 8783 = \log. 93 \times 704 \times 8783$.

2) *Der Logarithmus einer Potenz wird erhalten, wenn man den Logarithmus der Grundgröſſe durch den Exponenten der Potenz vervielfacht.*

Wäre im vorigen Beispiele $a = b = c = d$, so hätte man

$$\log. aaaa = \log. a^4 = 4 \log. a.$$

Wäre $a = 3$, so hätte man, da $\log. 3 = 0,4771213$, für die vierte Potenz von 3,

$\log. 3^4 = 4 \times 0,4771213 = 1,9084852$,
und diesem Logarithmen entspricht in den Tafeln die Zahl 81.

§. 153.

Weil bei der Division der Potenzen derselben

Grundgrößen der Exponent des Divisors vom Exponenten des Dividendus subtrahirt wird; so ist

1) Der Logarithmus eines Quotienten gleich dem Unterschiede der Logarithmen des Dividendus und des Divisors. Hat man also umgekehrt die Differenz zweier Logarithmen, so ist die Zahl des positiven Logarithmus der Dividendus, und die Zahl des negativen Logarithmus der Divisor.

Es ist daher

$$\log. \frac{a}{b} = \log. a - \log. b;$$

und

$$\log. 748 - \log. 82 = \log. \frac{748}{82}.$$

Da ferner $\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$, und nach §. 151. Art. 1. $\log. a^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m} \log. a$; so folgt:

2) Dafs der Logarithmus einer Wurzelgröfse erhalten wird, wenn man den Logarithmus der Grundgröfse durch den Wurzelexponenten dividirt; und dafs also umgekehrt ein Logarithmus, durch eine Gröfse dividirt, gleich ist dem Logarithmus einer Wurzelgröfse, deren Exponent der Divisor ist. Man hat daher

$$\begin{aligned} \log. \sqrt{8464} &= \frac{1}{2} \log. 8464 = \frac{1}{2} 3,9275757 \\ &= 1,9637878 = \log. 92; \end{aligned}$$

es ist also $\sqrt{8464} = 92$.

Ferner ist $\frac{1}{3} \log. 8464 = \log. \sqrt[3]{8464}$.

§. 154.

Wir haben im §. 139. eine Formel für die Anzahl der Glieder einer geometrischen Progression versprochen, die wir hier nachtragen wollen. Aus Nr. 3. des genannten §.'s hat man mit Hilfe der Logarithmen

$$\begin{aligned} \log. e &= \log. \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}} = \frac{1}{n-1} \log. \frac{u}{a} \\ &= \frac{1}{n-1} (\log. u - \log. a), \end{aligned}$$

hieraus ergibt sich nach gehöriger Reduktion,

$$n = \frac{\log. u - \log. a}{\log. e} + 1,$$

Der Quotient $\frac{\log. u - \log. a}{\log. e}$ muß immer eine ganze Zahl sein, weil die Anzahl der Glieder einer Progression nie ein Bruch sein kann.

§. 155.

Werden die Zinsen nach Verlauf eines Jahres zum Kapital geschlagen, so hat man fürs folgende Jahr nicht allein die Zinsen aus dem Kapital, sondern auch aus dem Zuwachse zu berechnen.

Es sei nun a das anfängliche Kapital, x der Zinsfuß, so hat man nach dem ersten Jahre

$$a \cdot \frac{100 + x}{100};$$

nach dem zweiten Jahre

$$a \cdot \frac{100 + x}{100} \times \frac{100 + x}{100} = a \left(\frac{100 + x}{100} \right)^2;$$

nach Verlauf des dritten Jahres

$$a \cdot \left(\frac{100 + x}{100} \right)^2 \times \frac{100 + x}{100} = a \left(\frac{100 + x}{100} \right)^3;$$

nach n Jahren wird das Kapital sein

$$a \left(\frac{100 + x}{100} \right)^n.$$

§. 156.

1) Ein Privatmann leiht eine Summe von 500 Gulden zu 6 Procent aus, und dieses Kapital blieb 10 Jahre in den Händen des Schuldners. Welche Summe müßte derselbe nach dieser Zeit, wenn die jährigen Zinsen zum Kapital geschlagen würden, bezahlen?

Man hat hier $a = 500$, $x = 6$; die zu empfangende Summe ist daher

$$S = 500 \left(\frac{106}{100} \right)^{10},$$

und

$$\begin{aligned}
 \log. S &= \log. 500 + 10 (\log. 106 - \log. 100). \\
 &= 2,6989700 + 10 (2,0253059 - 2,0000000) \\
 &= 2,6989700 + 0,2530590 = 2,9520290 \\
 &= \log. 805,424;
 \end{aligned}$$

der Gläubiger hat also 895,424 zu empfangen.

2) *Nach wieviel Jahren verdoppelt sich ein Kapital a, wenn Zins aus Zins berechnet wird?*

3) *Ein Kaufmann legt alle Jahre eine Summe a seiner Ersparnisse auf Zinsen; man fragt nun nach dem Zuwachse nach Verlauf von n Jahren.*

Man setze $\frac{100 + x}{100} = 1 + r$, wo $r = \frac{x}{100}$, so

ist die erste Summe nach n Jahren zu $a(1+r)^n$ angewachsen; die zweite Summe zu $a(1+r)^{n-1}$ u. s. w. Die letzte Summe giebt nach Verlauf von einem Jahre $a(1+r)$. Bezeichnet nun S den Zuwachs des Vermögens, so ist

$$\begin{aligned}
 S &= a(1+r)^n + a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + \dots + a(1+r) \\
 &= a[(1+r)^n + (1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \dots + (1+r)] \\
 &= a(1+r)[1 + (1+r) + (1+r)^2 + \dots + (1+r)^{n-1}];
 \end{aligned}$$

nun ist aber die Summe unter den grossen Klammern jene einer geometrischen Progression, deren erstes Glied 1, letztes Glied $(1+r)^{n-1}$, und Exponent $1+r$; folglich nach §. 140. (1) die Summe $\frac{(1+r)^n - 1}{r}$, und daher

$$S = \frac{a(1+r)[(1+r)^n - 1]}{r} = \frac{a(1+r)^{n+1} - a(1+r)}{r}.$$

4) *A leiht dem Freunde B die Summe von fl. 20000 zu 5 Procent auf zehn Jahre, und zwar unter der Bedingung, dass in den ersten 9 Jahren jährlich 1500 fl., und am Ende des zehnten Jahres der Rest zurückgezahlt werden sollten. Wie gross ist dieser Rest?*

5) *Es will ein Schuldner seine Schuld von A Gulden innerhalb n Jahren abtragen, indem er alle Jahre a fl. mit den Interessen bezahlt. Wieviel muss am Ende eines jeden Jahres bezahlt werden?*

Behält r seinen Werth $\frac{x}{100}$, so wächst die Summe

A in n Jahren an zu $A(1+r)^n$; der erste Termin a würde in derselben Zeit zum Vortheil des Schuldners zu $a(1+r)^{n-1}$; der zweite Termin zu $a(1+r)^{n-2}$; u. s. w. angewachsen sein. Man hat daher

$$A(1+r)^n = a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + a(1+r)^{n-3} + \dots + a$$

$$= a[1 + (1+r) + (1+r)^2 + \dots + (1+r)^{n-1}]$$

$$= a \left(\frac{(1+r)^n - 1}{r} \right).$$

Wollte z. B. ein Schuldner in 10 Jahren ein Kapital von 20000 und die Interessen in gleichen Theilen abtragen, so fragt sich, welche Summe jährlich, bei 5 Procent, zurückgezahlt werden muß?

§. 157.

Ist eine Summe A nach einem bestimmten Zeitraume zu bezahlen, so läßt sich ihr jetziger Werth dadurch angeben, wenn man die Summe A nach n Jahren, d. i. jetzt von einem Kapital a, mit Zins aus Zins erzeugt, denkt; die Frage kann also so gestellt werden: *Welche Summe kann seit n Jahren zu A angewachsen sein?* Wäre a die unbekannte Summe, so hätte man

$$a(1+r)^n = A,$$

und daraus
$$a = \frac{A}{(1+r)^n},$$

wo immer $r = \frac{x}{100}$. Diese Darstellungsart scheint bequemer zu sein, als jene, bei welcher der Bruch $\frac{100}{100+x}$ als gemeinschaftlicher Faktor genommen werden wird, weil man nämlich, aus dem vorhergehenden Verfahren den Log., $\frac{100+x}{100}$ schon kennt.

1) Ein Banquier hat nach vollen 5 Jahren 100000 fl. zu zahlen; er giebt aber für 150000 fl. Wechsel. Es fragt sich, wann diese fällig sind, wenn 5 Procent gezahlt werden.

Der jetzige Werth des Wechsels von 100000 fl., wel-

ehe nach 5 Jahren zahlbar sind, ist $\frac{100000}{(\frac{105}{100})^5}$; ist nun n die Epoche, da der Wechsel von 150000 fl. fällig wird, so ist sein jetziger Werth $\frac{150000}{(\frac{105}{100})^n}$; da nun der erste Wechsel durch den zweiten abgezahlt wird, so hat man die Gleichung

$$\frac{100000}{(\frac{105}{100})^5} = \frac{150000}{(\frac{105}{100})^n}, \text{ oder } \frac{2}{(\frac{105}{100})^5} = \frac{3}{(\frac{105}{100})^n},$$

und daraus wiederum

$$(\frac{105}{100})^n = \frac{3}{2} \times (\frac{105}{100})^5,$$

und mit Hülfe der Logarithmen:

$$n \log. (\frac{105}{100}) = \log. 3 - \log. 2 + 5 \log. (\frac{105}{100}),$$

und daraus endlich

$$\begin{aligned} n &= \frac{\log. 3 - \log. 2 + 5 \log. (\frac{105}{100})}{\log. (\frac{105}{100})} \\ &= \frac{0,4771213 - 0,3010300 + 5 \times 0,0211893}{0,0211893} \\ &= \frac{0,2820378}{0,0211893} = 13 \frac{65769}{211893}, \end{aligned}$$

der letzte Wechsel ist also nach 13 Jahren, und 3 und beiläufig $\frac{2}{3}$ Monaten fällig.

2) Jemand hat sechsmal nacheinander alle vier Jahre eine Summe von 600 Gulden zu bezahlen; er ist aber gesonnen, diese Schuld nun auf einmal abzutragen. Wie grofs muss diese Summe seyn, wenn 5 der Zinsfußs ist?

Der jetzige Werth der 600 Gulden, welche nach den ersten 4 Jahren zahlbar sind, ist $600 \times \left(\frac{1}{1+r}\right)^4$; nach vier andern Jahren $600 \left(\frac{1}{1+r}\right)^8$; u. s. w., folglich der jetzige Werth der ganzen Schuld

$$\begin{aligned} &\frac{600}{(1+r)^4} + \frac{600}{(1+r)^8} + \frac{600}{(1+r)^{12}} + \frac{600}{(1+r)^{16}} + \frac{600}{(1+r)^{20}} \\ &= 600 \times \left\{ \frac{\frac{1}{(1+r)^4} - \frac{1}{(1+r)^{24}}}{\frac{1}{(1+r)^4} - 1} \right\} = 600 \frac{1}{(1+r)^4} \left\{ \frac{\frac{1}{(1+r)^{24}} - 1}{\frac{1}{(1+r)^4} - 1} \right\}. \end{aligned}$$

$$= 600 \left(\frac{100}{105}\right)^4 \left\{ \frac{\left(\frac{100}{105}\right)^{24} - 1}{\left(\frac{100}{105}\right)^4 - 1} \right\} = 1920,8.$$

Denn es ist

$$\begin{aligned} \log. 600 &= 2,7781513 \\ \log. \left(\frac{100}{105}\right)^4 &= -0,0847572 \\ \hline \log. 600 \left(\frac{100}{105}\right)^4 &= 2,6933941 \\ \log. \left(\frac{100}{105}\right)^{24} &= -0,5085432 = \log. 0,31006; \\ \text{folglich der Zähler} &= -0,68994, \text{ und der Nenner} \\ 0,8227 - 1 &= -0,1773, \text{ und der Bruch also} \end{aligned}$$

$$\frac{-0,68994}{-0,1773} = \frac{68994}{17730},$$

$$\begin{aligned} \text{mithin } \log. \frac{68994}{17730} &= \log. 68994 - \log. 17730 \\ &= 4,8388113 - 4,2487087 = 0,5901026. \end{aligned}$$

Wird dieser Logarithmus zu 2,6933941 addirt, so hat man für ihre Summe

$$3,2834967 = \log. 1920,8.$$

Wer mehrere Beispiele zu berechnen wünscht, findet sie in: *Zins-Zinsrechnung von Schweins. Darmstadt 1812.*

Zwölftes Kapitel.

Permutationen, Variationen, Combinationen, und binomischer Lehrsatz.

§. 158.

Werden gegebene Größen $a, b, c, d, \dots$ so mit einander verbunden, daß von ihnen in jeder Verbindung eine gleiche Anzahl vorkömmt, eine jede aber von der andern Verbindung nur durch die Ordnung der Größen verschieden ist, so heißen diese Verbindungen *Permutationen*. Sollen aber die Verbindungen durch die Anzahl der *Elemente* (so werden nun die Größen $a, b, c, \dots$ genannt), und durch die Folge derselben von einander verschieden sein; so heißen derartige Verbindungen entweder *Varia-*

Wäre nun noch ein fünftes Element gegeben, so würde man leicht nach dieser Anordnung die $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ Verbindungen bilden. Folgende Regeln mögen zur leichtern Bildung der Permutationen dienen:

1) Man setze das letzte — *höchste* der Stelle nach — in einen rechten Winkel, und schreibe vor dem vertikalen Schenkel das unmittelbar vorhergehende Element und vertausche hierauf die beiden Elemente gegeneinander.

2) Hat man die vorigen Verbindungen abermals durch einen rechten Winkel getrennt, so schreibe man allen darin enthaltenen Complexionen das dritte Element, von der Rechten an, vor den vertikalen Schenkel des rechten Winkels, und vertausche dieses Element gegen die beiden nachfolgenden in den neu erhaltenen Verbindungen.

3) Den in Nro. 2 erhaltenen Complexionen schreibe man das vierte Element (von der Rechten an gerechnet) vor und vertausche hierauf in diesen neuen Complexionen dieses nämliche Element gegen jedes nachfolgende. So fährt man fort bis kein Element mehr übrig ist.

§. 161.

Es kann sich ereignen, daß unter den gegebenen Elementen einige gleichen sind, wäre z. B. $n = p + q$, und unter diesen p gleiche Elemente; so ist klar, daß die Verbindungen zu n Elementen, in welchen die ungleichen q Elemente ihre Stellen beibehalten, unter sich nicht verschieden sein können. Da nun in der Anzahl der Permutationen $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n$ zugleich $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots p$ mal gleiche Verbindungen vorkommen, so ist die Anzahl aller ungleichen Verbindungen:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (n - 1) n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p}.$$

Sind ausser p auch noch r gleiche Elemente gegeben, so ist, vermöge der vorigen Schlüsse die Anzahl der wirklich verschiedenen Verbindungen:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot r} ;$$

und allgemein aus den Elementen $a^p b^q c^r d^s$, wo $p + q + r + s = n$, hat man

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot q \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot r \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot s} .$$

§. 162.

Variationen sind Verbindungen zu zwei, drei, vier, ... Elementen, in welchen nicht allein dasselbe Element mehrmal, sondern auch ein späteres — höheres — einem frühern — niedern — vorgesetzt werden kann; jene Verbindungen heißen *Variationen mit Wiederholung*, und diese *Variationen ohne Wiederholung*. Setzt man indess über die Elemente noch die Zahlen 1, 2, 3, ... als Zeiger (indices), so lassen sich noch *Variationen zu bestimmten Summen bilden*.

§. 163.

Die verschiedenen Klassen der Variationen mit Wiederholung aus n Elementen werden auf folgende Weise gebildet.

Es giebt n Unionen. Die Binionen werden erhalten, wenn jedes Element sich selber und allen übrigen vorgesetzt wird, ihre Anzahl ist daher n^2 . Um die Ternionen zu erhalten, setzt man allen Binionen a vor, hierauf b , dann c , u. s. w.; man erhält dadurch n mal n^2 oder n^3 Ternionen. Im Allgemeinen findet man für die Klasse m die Variationszahl n^m . Aus den Elementen a, b, c, d bildet man

Unionen.			
a	b	c	d
Binionen.		Ternionen.	
aa, ab, ac, ad	aaa	baa	caa daa
ba, bb, bc, bd	aab	bab	cab dab
ca, cb, cc, cd	aac	bac	cac dac
da, db, dc, dd	aad	bad	cad dad
	aba	bba	cba dba
	abb	bbb	cbb dbb

Ternionen.

abc	bbc	cbe	dbc
abd	bbd	cbd	dbd
aca	bca	cca	dca
acb	bc b	ccb	dcb
acc	bcc	ccc	dcc
acd	bcd	ccd	dcd
ada	bda	cda	dda
adb	bdb	cdb	ddb
adc	bdc	cdc	ddc
add	bdd	cdd	ddd

u. s. w.

§. 164.

Bei der Bildung der Variationen ohne Wiederholung zu Binionen darf jedes Element mit allen übrigen, nur nicht mit sich, verbunden werden; es entstehen also für jedes Element $(n-1)$, und im allgemeinen n mal soviel, folglich $n(n-1)$ Binionen.

Die Ternionen erhält man, wenn allen Binionen ohne a , dieses Element; allen ohne b dieses Element u. s. w. vorgesetzt wird. Da nun die Anzahl der Binionen, welche kein a , kein b , kein c . . . enthalten, durch $(n-1)(n-2)$ ausgedrückt wird, weil nämlich ebensoviel vorhanden sind, als man aus $n-1$ Elementen bilden kann; so giebt es in Allem $n(n-1)(n-2)$ Ternionen.

Bei Bildung der Quaternionen schreibt man allen Ternionen ohne a , ohne b , . . . , deren Anzahl also $n(n-1)(n-2)$ ist, das fehlende Element vor; und da dieses n mal geschehen muß, so ist die Anzahl aller Variationen $n(n-1)(n-2)(n-3)$.

Es ist nun nicht mehr schwer, die Anzahl der Klasse m zu finden, sie ist nämlich

$$n(n-1)(n-2)(n-3) \dots [n-(m-1)].$$

Aus den Elementen a, b, c, d lassen sich folgende Verbindungen bilden:

<i>Unionen.</i>				<i>Binionen</i>		
a	b	c	d	ab	ac	ad
				ba	bc	bd
				ca	cb	cd
				da	db	dc
<i>Ternionen.</i>						
abc	abd	acb	acd	adb	adc	
bac	bad	bca	bda	bcd	bdc	
cab	cad	cba	cda	cdb	cdb	
dab	dac	dba	dca	dbc	dcb	

§. 165.

Werden die Variationsklassen zu bestimmten Summen verlangt, so ist auf folgende Weise zu verfahren:

1. Man setze die Summe s als Union.
2. Diese Union werde nach und nach in die Zahlen 1 und $(n-1)$, 2 und $(n-2)$, 3 und $(n-3)$, bis $(n-1)$ und 1 zerlegt, bis also eine Verbindung zum Vorschein kömmt, welche der ersten Binion symmetrisch gleich ist, d. h. welche dieselben Elemente, aber in umgekehrter Ordnung enthält.

3. In jeder Verbindung des vorigen Artikels zerlege man die letzten Ziffer $(n-1)$, $(n-2)$, $(n-3)$, ... wie so eben geschehen ist, und behalte die Ziffer zur Linken bei; hiedurch erhält man die Ternionen zur Summe s , aus welchen sich die Quaternionen, und so alle Verbindungen leicht herleiten lassen, bis man endlich zu einer Complexion kömmt, welche, nur aus Einern bestehend, die letzte ist.

Sind die Elemente a, b, c, d, e, f, g mit den Zeigern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 gegeben, so sind zur Summe 6:

6	1	14	11	13	111	12	111111.
15		23		22		21	
24		32		31	112	11	
33		41	21	12	211	11	
42	2	13		21			
51		22	31	11			
		31					
	3	12					
		21					
	4	11					

§. 166.

Bei den Combinationen darf kein späteres Element einem frühern vorgehen, wohl aber kann dasselbe Element sich vorgesetzt werden, und diese Verbindungen sind *Combinationen mit Wiederholung*, im Gegentheile *Combinationen ohne Wiederholung*, in welchen nie ein Element mehrmal vorkommen darf. Man begreift leicht, daß diese letztern nichts anders sind, als Variationen ohne Wiederholung, aus welchen jedoch jene Verbindungen ausgeschieden sind, in welchen ein früheres Element einem spätern nachsteht, oder was dasselbe ist, wo noch permutirt ist. Hier- nach hat man die Combinationszahlen:

Unionen n

Binionen $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot}$

Ternionen $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

Quaternionen $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$

M^{ionen} $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3) \dots [n-(m-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots m.}$

Sollen aus a, b, c, d, e alle Combinationsklassen ohne Wiederholung gebildet werden, so sind:

Unionen.

a b c d e

Binionen.

ab	ac	ad	ae
	bc	bd	be
		cd	ce
			de

Ternionen.

abc	abd	abe	acd	ace	ade
	bcd	bce	bde	cde	

Quaternionen.

abcd	abce	abde
	acde	bcde

Quinternionen.

a b c d e.

§. 167.

Diese Verbindungen finden sich in dem Produkte der Faktoren $(1 + a)(1 + b)(1 + c)(1 + d)(1 + e)$; denn es ist $(1 + a)(1 + b) = 1 + (a + b) + ab$; $(1 + a)(1 + b)(1 + c) = 1 + (a + b + c) + (ab + ac + bc) + abc$; $(1 + a)(1 + b)(1 + c)(1 + d) = 1 + (a + b + c + d) + ab + abc + abcd$.

ac	abd
ad	acd
bc	bcd
bd	
cd	

Kömmt noch der fünfte Faktor $(1 + e)$ hinzu, so müssen alle vorhergehenden Verbindungen erst durch 1, und dann durch e vervielfacht werden; dadurch wird die Klasse der Verbindungen um 1 erhöht; das Produkt ist daher:

$$1 + ab + abc + abcd + abcde = (1 + a)(1 + b)(1 + c)(1 + d)(1 + e).$$

ac abd abce

ad abe abde

ae acd acde

bc ace bcde

bd ade

be bcd

cd bce

ce bde

de cde

§. 168.

Sind nun die Faktoren unter sich gleich, d. h. $a = b = c = d \dots$; so sind auch alle Unionen, Binionen, Ternionen, ... unter sich gleich; ihre Anzahl ergibt sich also, wenn man einer Verbindung jeder Klasse die entsprechende Combinationszahl vorsetzt; da nun in dieser Annahme $(1 + a)^2$, $(1 + a)^3$, $(1 + a)^4$, ... $(1 + a)^n$ erhalten wird, so ist

$$(1 + a)^n = 1 + \frac{n}{1} a + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 + \dots + a^n \dots (1).$$

Wird $-a$ für $+a$ eingeführt, so darf man blos die Zeichen derjenigen Glieder ändern, in welchen ungrade Potenzen von a vorkommen; es ist mithin:

$$(1 - a)^n = 1 - \frac{n}{1} a + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 + \dots + \pm a^n \dots (2),$$

wo das obere Zeichen für ein gerades n , das untere aber für ein ungerades n gelten muß.

§. 169.

Soll das Produkt der Faktoren $(x + a)$, $(x + b)$, $(x + c)$, gebildet werden, ohne daß nach und nach die Multiplikation verrichtet wird, so bemerke man,

$$\text{daß } (x + a) = x \left(1 + \frac{a}{x}\right); (x + b) = x \left(1 + \frac{b}{x}\right);$$

u. s. w., so daß in der Entwicklung des §'s 167 $\frac{a}{x}$

für a , $\frac{b}{x}$ für b ; $\frac{c}{x}$ für c u. s. f. zu setzen, und die

ganze Entwicklung durch x^n zu vervielfachen ist. Da

nun $(a + b + c + \dots) \times \frac{1}{x}$ die Summe aller Unio-

nen; $(ab + ac + ad + \dots) \times \frac{1}{x^2}$ die Summe

aller Binionen ist; ferner die Summe aller Ternionen

durch $\frac{1}{x^3}$, und die Summe aller Nionen durch

$\frac{1}{x^n}$ vervielfacht werden muß; so hat man

$$\begin{aligned} & (x + a)(x + b)(x + c)(x + d)(x + e) \dots = \\ & = x^n \left[1 + \text{Unio-} \left| \frac{1}{x} \right. + \text{Binio-} \left| \frac{1}{x^2} \right. + \text{Ternio-} \left| \frac{1}{x^3} \right. + \dots + \text{Nio-} \left| \frac{1}{x^n} \right. \right] \\ & = x^n + \text{Unio-} \left| x^{n-1} \right. + \text{Binio-} \left| x^{n-2} \right. + \text{Ternio-} \left| x^{n-3} \right. + \dots + \\ & + \text{Nionen} \dots \dots \dots (3), \end{aligned}$$

aus den Elementen $a, b, c, d, e, \dots$

Ist nun $a = b = c = \dots$ so wird in (3) die linke Seite gleich $(x + a)^n$, und die Formel (2) darf nur durch x^n , und wegen des Gliedes $\frac{a}{x}$ für a , die

Glieder nach und nach, das erste durch $\frac{1}{x^0}$, das zweite durch $\frac{1}{x}$, das dritte durch $\frac{1}{x^2}$, u. s. w.

vervielfacht werden; oder was das nämliche ist, in (3) schreibe man eine Complexion für jede Klasse, und vervielfache sie hierauf durch die entsprechende Combinationszahl, hiedurch entsteht:

$$\begin{aligned} (x + a)^n &= x^n + \frac{n}{1} ax^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^2 x^{n-2} + \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \\ &+ a^4 x^{n-4} + \dots + a^n \dots (4). \end{aligned}$$

Durch diese Formel läßt sich jedes Binomium auf jede Potenz erheben, deren Exponent eine ganze positive Zahl ist, sie heißt die *Newtonische Formel*.

§. 170.

Sollen Combinationen mit Wiederholung gebildet werden, so darf jedes Element sich selber und allen darauf folgenden vorgesetzt werden; es giebt also auch hier n Unionen. Da bei den Binionen jedes Element sich selber vorgesetzt werden muß, so ist dieß ebensoviel, als wenn man aus $n + 1$ Elementen die Combinationen nach § 166 bilden müßte; schreibt man daher $n + 1$ für n in jenen Formeln, so hat man:

Unionen n ;

Binionen $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$;

Ternionen $\frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$;

Quaternionen $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$;

.....

$M_{\text{ionen}} \frac{n(n+1)(n+2)\dots[n+(m-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots m}$

Aus den Elementen a, b, c, d lassen sich also folgende Combinationen bilden:

Unionen.

$a \quad b \quad c \quad d$

Binionen.

$aa \quad ab \quad ac \quad ad$
 $bb \quad bc \quad bd$
 $cc \quad cd$
 dd

Ternionen

$aaa, \quad aab \quad aac \quad aad \quad abb \quad abc \quad abd \quad acc \quad acd \quad add$
 $bbb \quad bbc \quad bbd \quad bcc \quad bcd \quad bdd \quad ccc \quad ccd \quad cdd \quad ddd.$

§. 171.

Nun setze man in die Formeln (1) und (2) den Exponenten $-n$ für $+n$, so ist $(1+a)^{-n} = \frac{1}{(1+a)^n}$; wird also die Einheit durch $(1+a)^n$ dividirt, so hat man $(1+a)^{-n}$. Die Division wird auf folgende Weise verrichtet:

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{1} \left(\frac{n}{1} a - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 - \dots \right) \\
\hline
- 1 - \frac{n}{1} a - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 - \dots \\
\hline
- na - \frac{n^2 - n}{1 \cdot 2} a^2 - \frac{n^3 - 3n^2 + 2n}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 - \dots \\
+ na + n^2 a^2 + \frac{n^3 - n^2}{1 \cdot 2} a^3 - \frac{n^2(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^4 - \dots \\
\hline
+ \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} a^2 + \frac{n^3 - 2n}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 - \dots \\
- \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} a^2 - \frac{n^3 + n^2}{1 \cdot 2} a^3 - \dots \\
\hline
- \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 \\
\hline
\dots
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
1 + \frac{n}{1} a + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 + \dots \\
\hline
1 - na + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} a^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 + \dots
\end{array}$$

Es ist nicht schwer sich zu überzeugen, daß die jedesmalige durch den ersten Theil 1 des Divisors zu dividirende Gröfse eines jeden Restes eine Verbindung a, a^2, a^3, a^4 ist, welche zum Coëfficienten die Combinationszahlen einer jeden Klasse mit Wiederholung hat; es ist daher:

$$(1 + a)^{-n} = 1 - na + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} a^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 + \dots \quad (5),$$

welche Formel niemals abbricht, also nach Gefallen verlängert werden kann; für ein negatives a werden alle Glieder positiv.

Mit Hilfe der Formel (5) läßt sich nun auch $(x + a)^{-n} = x^{-n} (1 + ax^{-1})^{-n}$ entwickeln, indem $\frac{a}{x} = ax^{-1}$ für a geschrieben wird, folglich:

$$(x + a)^{-n} = x^{-n} - \frac{n}{1} a x^{-(n+1)} + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} a^2 x^{-(n+2)} - \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 x^{-(n+3)} + \dots \quad (6).$$

Schreibt man $n = 1$, so ist

$$\frac{1}{x + a} = \frac{1}{x} - \frac{a}{x^2} + \frac{a^2}{x^3} \dots$$

Wird in (4) der Bruch $\frac{1}{n}$ für n geschrieben, so ergibt sich die allgemeine Formel für das Wurzel- ausziehen aus einem Binomium, nämlich

$$(x + a)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x + a} = x^{\frac{1}{n}} \left\{ 1 + \frac{a}{nx} + \frac{\frac{1}{n}(\frac{1}{n} - 1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{a^2}{x^2} + \dots \right\} \dots \quad (7).$$

Soll nun z. B. aus 65 die sechste Wurzel gezogen werden, so mache man $65 = 64 + 1 = x + a$, mithin $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{64} = 2$, und obige Formel giebt:

$$\begin{aligned}
 \sqrt[6]{65} &= 2 \left\{ 1 + \frac{1}{6 \cdot 64} - \frac{5}{1 \cdot 2 \cdot 6^2 \cdot 64^2} + \frac{25}{3 \cdot 6^3 \cdot 64^3} - \dots \right\} \\
 &= 2 (1 + 0,0026042 - 0,0000169 + 0,0000094 - \dots) \\
 &= 2,001261.
 \end{aligned}$$

§. 174.

Besteht A aus a und b Theilen verschiedener Art, B aus α und β Theilen gleichfalls verschiedener Art, so können die erstern mit letztern in folgende Verbindungen gebracht werden:

$$(a + b)(\alpha + \beta) = a\alpha + a\beta + b\alpha + b\beta.$$

Wäre z.B. in einer Urne 7 weisse und 10 schwarze Kugeln, in einer andern Urne aber 9 weisse und 12 schwarze Kugeln, so fragt sich: wie oft diese Kugeln zu zwei sich verbinden lassen? Hier ist $a = 7$, $b = 10$, $\alpha = 9$, $\beta = 12$, mithin

$(7 + 10)(9 + 12) = 7 \cdot 9 + 7 \cdot 12 + 10 \cdot 9 + 10 \cdot 12$,
d. h. $7 \cdot 9 = 63$ Verbindungen blos aus weissen Kugeln bestehend; $7 \cdot 12 + 10 \cdot 9 = 84 + 90 = 174$ Verbindungen einer weissen mit einer schwarzen Kugel; und $10 \cdot 12 = 120$ Verbindungen zu zwei schwarzen Kugeln.

Dreizehntes Kapitel.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

§. 175.

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist das Verhältniß der günstigen Fälle zu allen möglichen. Bei Berechnung der Wahrscheinlichkeit kömmt es hauptsächlich darauf an, sowohl alle günstigen, als auch alle möglichen Fälle sorgfältig zu vereinigen. Das Verhältniß der ungünstigen zu allen möglichen Fällen ist die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit. Wir wollen diese Begriffe durch einige Beispiele erläutern.

1) *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln 5 und 2 zu werfen?*

Da auf jedem Würfel sechs Felder, mit 1, 2, 3,

4, 5, 6 bezeichnet, vorkommen, so läßt sich jedes Feld des ersten mit jedem Felde des zweiten Würfels verbinden; man hat also Variationen mit Wiederholungen zu bilden, deren Anzahl aus *sechs* Elementen $6^2 = 36$ ist, und dieß ist auch die Anzahl aller möglichen Fälle. Die günstigen Fälle hingegen sind 52 und 25, mithin ist $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ die Wahrscheinlichkeit, 5 und 2 zu werfen; dieß kann also unter 18 Würfeln sich einmal ereignen.

2) *Was ist wahrscheinlicher, mit zwei Würfeln auf den ersten Wurf 4, oder 7 zu werfen?*

Die günstigen Fälle, vier Augen zu werfen, sind 13, 22, 31, also nur drei, folglich $\frac{3}{36}$ die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses. Die günstigen Fälle, 7 Augen zu werfen, sind 16, 25, 34, 43, 52, 61, mithin $\frac{6}{36}$ die Wahrscheinlichkeit für diesen Fall; es folgt hieraus, daß die Wahrscheinlichkeit, 7 Augen auf den ersten Wurf zu werfen, größer ist, als für 4 Augen.

3) *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 4 Würfeln gleiche Augen (gleiche Felder) zu werfen?*

Da es überhaupt 6 günstige und 36 mögliche Fälle giebt, so ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{6}{6^4} = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$.

4) *Unter m Karten sind p von derselben Farbe; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, m' von den p Karten auf das erste Mal zu ziehen?*

Von p Karten können so oft m' herausgezogen werden, als p Elemente zu m' sich combiniren lassen, nämlich

$$\frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-m'+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots m'},$$

und dieser Quotient zeigt zu gleicher Zeit die Anzahl aller günstigen Fälle an. Da nun m' aus m Karten so oft gezogen werden können, als die Zahl

$$\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-m'+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots m'}$$

anzeigt, so ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-m+1)}{m(m-1)(m-2)\dots(m-m'+1)}.$$

Wäre ein Spiel von 52 Karten gegeben, unter welchen 13 Herz sich befinden; wie groß müßte die Wahrscheinlichkeit sein, 3 Herz zu ziehen? Hier hat man $p = 13$, $m = 52$, $m' = 3$, also

$$\frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{52 \cdot 51 \cdot 50} = \frac{11}{850}, \text{ etwa } \frac{1}{77} \text{ die Wahrscheinlichkeit.}$$

§. 176.

Man hat in m Karten a Herz, a' Eckstein, . . . ; man zieht $m' + m''$ heraus; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, m' Herz und m'' Eckstein zu ziehen?

Es lassen sich m Karten zur Klasse $m' + m''$ combiniren:

$$\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m+1-m'-m'')}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (m' + m'')},$$

dies ist der Nenner der Wahrscheinlichkeit. Nun

lassen sich a Herz $\frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-m'+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m'}$

mal zu m' , und a' Eckstein

$$\frac{a'(a'-1)(a'-2)\dots(a'-m''+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots m''} \text{ mal}$$

zu m'' Elementen combiniren; da ferner jede Verbindung der Klasse m' auch eine Verbindung der Klasse m'' bei sich hat, so ist der Zähler der Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-m'+1) \times a'(a'-1)(a'-2)\dots(a'-m''+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m' \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots m''}.$$

§. 177.

Wenn es gleichgiltig ist, welches von zweien Ereignissen zuerst eintritt; z. B. wenn gefragt wird, welches die Wahrscheinlichkeit sei, mit zwei Würfeln zuerst 5 oder 7 Augen zu werfen; so suche man bei der Ereignisse absolute Wahrscheinlichkeit, deren Summe die verlangte ist. Nun aber sind $\frac{4}{36}$ und $\frac{6}{36}$ diese Wahrscheinlichkeiten; also

$$\frac{4}{36} + \frac{6}{36} = \frac{10}{36}.$$

§. 178.

Es giebt Fälle, bei welchen die absoluten Wahrscheinlichkeiten unter sich verglichen werden müssen; wenn man z. B. fragt: wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln eher 7 als 5 Augen zu werfen? — so muß man zuerst ihre absoluten Wahrscheinlichkeiten: $\frac{6}{36}$ und $\frac{4}{36}$, aufsuchen, deren Summe den Zähler, also die möglichen Fälle, giebt; es müssen also die günstigen Fälle eines jeden Ereignisses durch die möglichen dividirt werden; folglich die relativen Wahrscheinlichkeiten:

$$\frac{\frac{6}{36}}{\frac{6}{36} + \frac{4}{36}} = \frac{6}{10}, \text{ und } \frac{\frac{4}{36}}{\frac{6}{36} + \frac{4}{36}} = \frac{4}{10};$$

unter zehn Würfeln giebt es 6, sieben Augen zu werfen, und nur 4, um 5 Augen zu werfen.

In einer Urne befinden sich Kugeln von 6 verschiedenen Farben; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eher eine weiße als eine rothe zu ziehen?

Wären m weiße, n rothe, p blaue, q grüne, r gelbe und s schwarze Kugeln darin, so setze man:

$$m + n + p + q + r + s = M,$$

und $\frac{m}{M}$ ist die absolute Wahrscheinlichkeit, eine weiße

Kugel zu ziehen; eine rothe zu holen, ist $\frac{n}{M}$ die absolute Wahrscheinlichkeit; also jene, eher eine weiße als eine rothe zu ziehen:

$$\frac{\frac{m}{M}}{\frac{m}{M} + \frac{n}{M}} = \frac{m}{m + n}.$$

§. 179.

Bisweilen hängt ein Ereigniß vom Zusammenflusse mehrerer andern ab, die ihre eigenen Wahrscheinlichkeiten haben. Wie wahrscheinlich ist es z. B., mit zwei Würfeln zuerst 9 und dann 8 Augen zu werfen? Die Wahrscheinlichkeit, auf den ersten

Wurf 9 Augen zu werfen, ist $\frac{4}{36}$; denn es sind die günstigen Fälle 36, 45, 54, 63; die Wahrscheinlichkeit, 8 Augen zu werfen, ist $\frac{5}{36}$; da nur dann 8 Augen gelten sollen, wenn zuvor 9 geworfen worden sind, so findet der Wurf mit 8 Augen nur so oft Statt, als Würfe zu 9 Augen wahrscheinlich sind; es muß also jeder wahrscheinliche Wurf zu 8 Augen mit jedem zu 9 Augen verbunden werden; man erhält die Wahrscheinlichkeit, im zweiten Wurf 8 Augen zu werfen,

$$\frac{4}{36} \times \frac{5}{36} = \frac{5}{36 \times 9} = \frac{5}{324}.$$

Eine solche Wahrscheinlichkeit heißt *zusammengesetzt*, in welcher Beziehung die absoluten Wahrscheinlichkeiten *einfach* genannt werden.

Es ist nun nicht mehr schwer, zu beweisen, wie sich eine Wahrscheinlichkeit aus mehreren einfachen zusammensetzen läßt.

§. 180.

1) Nach diesen vorangeschickten Bemerkungen findet man nun leicht die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln zuerst 5, im zweiten Wurf 7, im dritten Wurf 11 Augen zu werfen. Die einfachen Wahrscheinlichkeiten sind $\frac{4}{36}$ für 4, $\frac{6}{36}$ für 7, und $\frac{2}{36}$ für 11 Augen zu werfen; folglich die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit, im letzten Wurf 11 Augen zu werfen, ist

$$\frac{4}{36} \times \frac{6}{36} \times \frac{2}{36} = \frac{1}{9} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{18} = \frac{1}{972},$$

die also sehr gering ist.

2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln in zwei Würfen 8 oder 9 Augen zu werfen, so daß, wenn eines von jenen Ereignissen Statt gefunden hat, der andere Wurf nicht mehr erlaubt sein soll?

Die Wahrscheinlichkeit, 9 Augen zu werfen, ist $\frac{4}{36}$, also sie nicht zu werfen, $\frac{32}{36}$; dieß ist also die Wahrscheinlichkeit der Möglichkeit eines zweiten Wurfs. Nun ist $\frac{5}{36}$ die Wahrscheinlichkeit, 8 Augen auf einen Wurf zu werfen; mithin die Wahrschein-

lichkeit, im zweiten Wurf 8 Augen zu werfen, $\frac{5}{36} \times \frac{32}{36}$; die Wahrscheinlichkeit, im ersten Wurf 9, und im zweiten 8 Augen zu werfen, ist nach §. 177.

$$\frac{4}{36} + \frac{5}{36} \times \frac{32}{36} = \frac{76}{324}.$$

Man gelangt zu demselben Resultate, wenn man die Wahrscheinlichkeit für 8 Augen auf den ersten Wurf bestimmt; denn man hat $\frac{5}{36}$ absolute Wahrscheinlichkeit, also des Gegentheils $\frac{31}{36}$, d. i. die 8 Augen nicht zu werfen; mithin $\frac{31}{36} \times \frac{4}{36}$ die Wahrscheinlichkeit, 9 Augen im zweiten Wurf zu werfen; folglich die Wahrscheinlichkeit, im ersten Wurf 8, im zweiten 9 Augen zu werfen, ist

$$\frac{5}{36} + \frac{31}{36} \times \frac{4}{36} = \frac{76}{324}.$$

3) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln auf den ersten Wurf 4, auf den zweiten 5, und auf den dritten 6 Augen zu werfen, und zwar unter der Bedingung, daß der zweite Wurf nicht erlaubt ist, wenn der erste gelingt, und der dritte nicht, wenn der zweite gelingt?

Die einfachen Wahrscheinlichkeiten sind $\frac{3}{36}$, $\frac{4}{36}$, $\frac{5}{36}$; die Wahrscheinlichkeit eines zweiten Wurfs $\frac{33}{36}$, also die Wahrscheinlichkeit, auf den zweiten Wurf 5 Augen zu werfen, ist $\frac{33}{36} \times \frac{4}{36}$, folglich die Wahrscheinlichkeit, auf den ersten Wurf 4, und auf den zweiten 5 Augen zu werfen:

$$\frac{3}{36} + \frac{33}{36} \times \frac{4}{36} = \frac{1}{12} + \frac{11}{12} \times \frac{1}{9} = \frac{5}{27};$$

mithin die Wahrscheinlichkeit eines dritten Wurfs $\frac{22}{27}$, und 6 Augen zu werfen $\frac{22}{27} \times \frac{5}{36} = \frac{55}{486}$; die verlangte Wahrscheinlichkeit ist daher

$$\frac{3}{36} + \frac{33}{36} \times \frac{4}{36} + \frac{55}{486} = \frac{145}{486}.$$

§. 181.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung läßt sich auf Lotterien, Wetten und auf die Sterblichkeit anwenden; für den letztern Punkt giebt die Erfahrung folgende Thatsachen an die Hand:

1) Die Anzahl der Verheirathungen in einem Lande, für eine bestimmte Zeit, ist zu den Geburten und zur Bevölkerung, wie 3 : 14 : 396.

2) Die Anzahl der neugeborenen Knaben zu jener der Mädchen, wie 22 : 21.

3) Die Bevölkerung, Geburten, die Anzahl der Gestorbenen, der Verehelichungen ist beiläufig:

2037615 : 71868 : 67700 : 15345.

4) Die Lebensdauer der Generation vom Vater und Sohn ist 33 Jahre.

5) Die Anzahl der Verstorbenen männlichen Geschlechts zu der des weiblichen ist, wie 26 : 25; und in irgend einem Lande ist die Anzahl der Lebenden des ersten Geschlechts zu den Lebenden des zweiten Geschlechts, wie 33 : 29.

6) Die Hälfte der ganzen Population ist unter 25 Jahren; und alle 25 Jahre wird die eine Hälfte des Menschengeschlechts erneuert.

Wer im Allgemeinen mehr über die Rechnung der Wahrscheinlichkeit sich belehren will, der muß *Laplace*, *Lacroix*, *Condorcet*, *Duvillard*, *Tetens*, *Christiani*, *Florencourt*, *Rüdiger* u. A. zu Rathe ziehen.

Vierzehntes Kapitel.

Unbestimmte Gleichungen des ersten und zweiten Grades.

§. 182.

Wir wollen in der Kürze die Auflösung solcher Gleichungen in nachfolgenden Beispielen anschaulich machen.

Welche Zahlen lassen, durch 39 und 56 dividirt, die Reste 39 und 27?

Die Zahlen seien n , und x , y die Quotienten; folglich $n = 39x + 16 = 56y + 27$; woraus sich ergibt:

$$39x = 56y + 11;$$

wird durch den Coëfficienten 39 dividirt, so ist

$$x = \frac{56y + 11}{39} = y + \frac{17y + 11}{39};$$

da x und y ganze Zahlen sein sollen, so muß y in dem Bruche $\frac{17y + 11}{39}$ so bestimmt werden, daß

der Zähler durch den Nenner theilbar wird; man setze daher $\frac{17y + 11}{39} = v$, wodurch wird

$$x = y + v \dots \dots \dots (1),$$

und aus dem Bruche selbst

$$y = \frac{39v - 11}{17} = 2v + \frac{5v - 11}{17} = 2v + u \dots (2),$$

wo $u = \frac{5v - 11}{17}$ ist; wird nun wiederum hieraus v entwickelt, so erhält man

$$v = \frac{17u + 11}{5} = 3u + \frac{2u + 11}{5} = 3u + t \dots (3);$$

aus der Gleichung $\frac{2u + 11}{5} = t$ ergibt sich

$$u = \frac{5t - 11}{2} = 2t + \frac{t - 11}{2} = 2t + s \dots (4),$$

und aus $s = \frac{t - 11}{2}$ folgt endlich

$$t = 2s + 11 \dots \dots \dots (5).$$

Wer nur einigermaßen sich mit dem Zusammenhange der Gleichungen (5), (4), (3), (2), (1) vertraut macht, der wird leicht einsehen, daß die Coëfficienten der Größen y, v, u, t, s nichts anders sind, als die Quotienten $\frac{56}{39} = 1 + \frac{17}{39}$; $\frac{39}{17} = 2 + \frac{5}{17}$; $\frac{17}{5} = 3 + \frac{2}{5}$; $\frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$, d.h. die Quotienten, welche man erhält, wenn der Bruch $\frac{56}{39}$ in einen Kettenbruch verwandelt wird. Ferner ist die Gröfse 11 bei allen Divisionen unverändert geblieben, sie hat nur ihr Zeichen gewechselt, und zwar bei der ersten Division positiv, bei der zweiten negativ, bei der dritten positiv, bei der vierten negativ, bei der fünften positiv; folglich ist sie bei den ungraden Divisionen positiv, und bei den graden negativ geblieben.

§. 183.

Um die Sache kürzer zu fassen, seien die Quotienten $1 = a$, $2 = b$, $3 = c$, $2 = d$, $2 = e$, und bezeichnen die Glieder der Näherungswerthe durch $(a) = a$; $(ab) = ab + 1$; $(ac) = abc + a + c$; $(ad) = abcd + ad + dc + ab + 1$; $(ae) = (ad) e + (ac)$; $(b) = b$; $(bc) = bc + 1 = (b) c + 1$; $(bd) = (bc) d + (b)$; $(be) = (bd) e + (bc)$. Da nun der Näherungswerth $\frac{(ae)}{(be)}$ dem Urbruche selbst gleich

ist, so hat man für x und y , wenn nach und nach die Gleichungen (2), (3), (4) und (5) eingeführt werden, folgende Werthe:

$$\begin{aligned} x &= a(bv + u) + v = (ab + 1)v + au \\ &= (ab)v + (a)u \\ &= (ab)cu + (ab)t + (a)u \\ &= [(ab)c + (a)]u + (ab)t \\ &= (ac)u + (ab)t \\ &= (ac)dt + (ac)s + (ab)t \\ &= [(ac)d + (ab)]t + (ac)s = (ad)t + (ac)s \\ &= (ad)es + (ad) \times 11 + (ac)s \\ &= [(ad)e + (ac)]s + (ad) \times 11 \\ &= (ae)s + (ad) \times 11; \end{aligned}$$

für y erhält man:

$$\begin{aligned} y &= (b)v + u = (b)cu + (b)t + u = (bc)u + (b)t \\ &= (bc)dt + (bc)s + (b)t \\ &= [(bc)d + (b)]t + (bc)s \\ &= (bd)t + (bc)s \\ &= (bd)es + (bd) \times 11 + (bc)s \\ &= [(bd)e + (bc)]s + (bd) \times 11 \\ &= (be)s + (bd) \times 11 \end{aligned}$$

Bemerkt man nun, daß $(ae) = 56$, und $(bd) = 39$, so findet man für die vorliegende Gleichung folgende Werthe für x und y :

$$x = 56s + (ad) 11 \dots \quad (\alpha)$$

$$y = 39s + (bd) 11 \dots \quad (\beta),$$

in welchen die Zahl 11 das positive Zeichen haben muß, welches immer Statt findet, wenn der Nähe-

rungswerth $\frac{(ad)}{(bd)}$ eine grade Stelle einnimmt; sie müßte aber negativ genommen werden, wenn jener letzte Näherungswerth auf einer ungraden Stelle wäre.

Da die Gröfse s in den Gleichungen (α) und (β) jeden möglichen Werth haben kann, jedoch für negative s eine Grenze, nämlich $\frac{56 s}{(ad)_{11}}$ ist, so schreibe

man $-s$ für s , entwickle $\frac{(ad)}{(bd)} = \frac{23}{16}$; man hat alsdann

$$x = 23 \times 11 - 56s = 253 - 56s,$$

$$y = 16 \times 11 - 39s = 176 - 39s;$$

um hier positive Werthe zu erhalten, darf s nicht größer als 4 sein, alle abwärts gehenden Zahlen 4, 3, 2, 1, 0, -1 , -2 , -3 , ... geben positive Werthe. Für $s = 4$ ist $x = 29$ und $y = 20$, folglich $n = 39 \times 29 + 16 = 1147 = 56 \times 20 + 27$, die kleinste Zahl, welche der obigen Aufgabe Genüge leistet; setzt man zu dieser Zahl noch ein Vielfaches des Produkts $56 \times 39 = 2184$, so ist die allgemeine Form aller Zahlen, welche in der Aufgabe verlangt werden:

$$n = 1147 + 2184 m,$$

diese Zahlen selbst bilden also eine arithmetische Reihe, deren erstes Glied 1147, und Differenz 2184 ist.

§. 184.

Wäre der Coëfficient 56 der Gröfse y negativ, so würden alle Quotienten a, b, c, d, e negativ, und vermöge der Bildung der Näherungsbrüche eines Kettenbruches die Glieder dieser Brüche bald positiv, bald negativ, und zwar $(a), (ac), (ae), (b), (bd)$ negativ, und $(ab), (ad), (bc), (be)$ positiv. Wird diese Bemerkung auf die Gleichungen (α) und (β) angewandt, so wird für eine grade Anzahl Quotienten

$$x = (ad)_{11} - 56s \dots (\gamma)$$

$$y = 39s - (bd)_{11} \dots (\delta),$$

und für eine ungrade Anzahl Quotienten, weil der Faktor 11 alsdann negativ genommen werden muß:

$$\begin{aligned}x &= (af)s - (ae) \text{ 11 } \dots \dots (\epsilon) \\y &= (be) \text{ 11 } - (bf)s \dots \dots (\eta)\end{aligned}$$

§. 185.

Hieraus ergeben sich folgende Regeln zur Auflösung unbestimmter Gleichungen des ersten Grades:

1. Man nehme die Coëfficienten der unbekannten Gröſſen x und y als einen unächten Bruch, und verwandle ihn in einen Kettenbruch. Hieraus erhellet schon, daß eine unbestimmte Gleichung, deren Coëfficienten einen gemeinschaftlichen Faktor haben, in ganzen Zahlen unauflösbar sey, wenn dieser Faktor nicht allen Gliedern der Gleichung gemein ist.

2. Man bilde den letzten Näherungswerth, und setze seinen Nenner in die Gleichung (α) , und seinen Zähler in (β) ; wenn die Glieder des Urbruchs aber ungleiche Zeichen haben, in die Gleichungen (γ) , (δ) für eine grade Stelle des Näherungsbruchs, und in (ϵ) , (η) für eine ungrade Stelle des Näherungswerthes; der Faktor 11, welcher immer die bekannte unabhängige Gröſſe der gegebenen Gleichung anzeigt, ist positiv für eine grade Anzahl Quotienten und negativ im Gegentheile.

§. 186.

Beispiele. 1) Zwei Händler haben 100 Ochsen miteinander zu verkaufen. Der eine sagt: will ich die meinigen in Haufen zu 8 stellen, so bleiben mir 7; der andere antwortet hierauf: zähle ich die meinigen zehn und zehn, so bleiben mir auch sieben übrig. Wieviel Ochsen hatte ein jeder von beiden?

Aufl. Der eine habe x mal 8; der andere y mal 10 Ochsen, folglich insgesamt $8x + 7 + 10y + 7 = 100$, und daher

$$8x + 10y = 86;$$

wird der gemeinschaftliche Faktor 2 weggelassen, so ist die aufzulösende Gleichung

$$4x + 5y = 43;$$

der einzige Näherungswerth des Bruches $\frac{4}{5}$ ist $\frac{1}{1}$, wodurch die Gleichungen (ϵ) und (η) geben:

$$x = 5s - 43,$$

$$y = 43 - 4s;$$

hier kann s nicht kleiner als $\frac{43}{5} = 8\frac{3}{5}$, und nicht grösser als $\frac{43}{4} = 10\frac{3}{4}$ sein, die einzigen zwischenliegenden Werthe sind also $s = 9$, und $= 10$; für $s = 9$ wird $x = 2$, und $y = 7$; für $s = 10$ hat man $x = 7$, und $y = 3$; der erste Händler hatte also $2 \cdot 8 + 7 = 23$, der zweite $7 \cdot 10 + 7$; oder der erste $7 \cdot 8 + 7 = 63$, der zweite $3 \cdot 10 + 7 = 37$.

2. Die Zahl 1591 in zwei solche Theile zu theilen, dass der eine durch 23, der andere durch 34 theilbar sei. Welche Theile sind es?

Aufl. Sind x und y die Quotienten, so sind die Theile durch $23x$ und $34y$ bezeichnet, mithin

$$23x + 34y = 1591.$$

Wird $\frac{34}{23}$ in einen Kettenbruch verwandelt, so erhält man die Quotienten 1, 2, und den letzten Näherungswerth $\frac{3}{2}$, mithin nach den Formeln (γ), (δ):

$$x = 3 \cdot 1591 - 34s$$

$$y = 23s - 2 \cdot 1591;$$

hier kann s nicht kleiner als $\frac{3182}{23} = 138\frac{8}{23}$, und nicht grösser als $\frac{4773}{34} = 140\frac{13}{34}$ genommen werden; man hat also entweder $s = 139$ oder $s = 140$; für den ersten Werth ist $x = 47$, und $y = 15$; für den zweiten Werth von s ist $x = 13$, und $y = 38$; mithin die Theile selbst $23 \times 47 = 1081$, und $34 \times 15 = 510$; oder $23 \times 13 = 299$, und $34 \times 38 = 1292$.

3. Welche Zahlen lassen, durch 501 und 740 dividirt, die Reste 2 und 3?

Aufl. Sind x und y die Quotienten, und n die Zahl, so ist

$$n = 501x + 2 = 740y + 3$$

und hieraus

$$501x = 740y + 1.$$

Wird $\frac{740}{501}$ in einen Kettenbruch verwandelt, so ergeben sich die Quotienten 1, 2, 10, 2, 1, 1, und der letzte Näherungswerth $\frac{161}{109}$, daher nach den Formeln (α) und (β)

$$x = 740s + 161,$$

$$y = 501s + 109.$$

Für $s = 0$ werden $x = 161$, $y = 109$; die geringste Zahl $n = 501 \times 161 + 2 = 740 \times 109 + 3 = 80663$, und alle Zahlen der Form

$$80663 + 740 \times 501 m = 80663 + 370740 m.$$

4. In welche Theile muß 4890 zerlegt werden, damit, wenn der erste durch 37 dividirt wird, zum Reste 3, und wenn der andere durch 54 dividirt wird, zum Reste 3, und wenn der andere durch 54 dividirt wird, zum Reste 6 lasse?

5. Die Zahl 101 in zwei Theile zu theilen, wovon der eine durch 5, der andere durch 7 ohne Rest theilbar sei.

6. Man suche alle Vielfachen von 20, welche durch 29 dividirt den Rest 6 lassen.

§. 187.

Sind zwei Gleichungen gegeben, welche zusammen drei unbekannte Gröſsen enthalten, so muß erst eine von diesen eliminirt, und hernach die Endgleichung nach den oben gegebenen Regeln behandelt werden. Hiedurch wird eine neue unbekannte Gröſſe eingeführt, welche noch mit der eliminirten in Verbindung gebracht werden muß. Wir wollen dies durch folgendes Beispiel erläutern, nämlich:

Welche Zahlen lassen durch 3, 7, 10 dividirt, die Reste 2, 3, 9 übrig?

Dieselbe Zahl erscheint unter folgenden Formen, wenn x , y , z die Quotienten sind,

$$n = 3x + 2 = 7y + 3 = 10z + 9;$$

aus den beiden ersten erhält man

$$3x = 7y + 1,$$

und $\frac{7}{3}$ in einen Kettenbruch verwandelt giebt den einzigen Quotienten 2, und den Näherungswerth $\frac{2}{1}$, wodurch aus den Formeln (α) und (β) werden

$$x = 7s - 2, y = 3s - 1,$$

für $s = 1$ sind $x = 5$, $y = 2$, mithin die allgemeine Formel der Zahlen, welche durch x und y dividirt, die Reste 2 und 3 lassen, ist $17 + 21m$. Es muß nun für m ein Werth gefunden werden, für welchen

die gesuchten Zahlen auch auf z sich beziehen lassen. Man hat daher

$$10z + 9 = 21m + 17,$$

und hieraus die reducirte Gleichung

$$10z = 21m + 8.$$

Der Bruch $\frac{21}{10}$ in einen continuirlichen verwandelt giebt 2 zum Quotienten, und $\frac{2}{1}$ zum letzten Näherungswerthe, mithin nach (α) und (β)

$$z = 21s' - 2 \cdot 8 = 21s' - 16$$

$$m = 10s' - 8;$$

setzt man hier, um die negativen Zahlen zu vermeiden, $s' + 1$ für s' , so hat man

$$z = 21s' + 5,$$

$$m = 10s' + 2;$$

für $s' = 0$ werden die geringsten positiven Werthe $z = 5$, $m = 2$ erhalten, die geringste Zahl, welche der Aufgabe Genüge leistet, ist $n = 59$, und die allgemeine Form aller dieser Zahlen

$$59 + 3 \cdot 7 \cdot 10 u = 59 + 210 u,$$

wo für u alle möglichen positiven Zahlen gesetzt werden können.

Zur Uebung folgen hier noch Beispiele:

1) Drei ganze positiven Zahlen sollen gesucht werden; das Fünffache der ersten, das Dreifache der zweiten und das Achtfache der dritten geben 380 zur Summe; wird aber das Dreifache der dritten von der Summe des Siebenfachen der ersten und des Doppelten der zweiten abgezogen, so bleibt 160.

2) Die Zahl 120 in drei Theile zu theilen, daß der erste durch 6, der zweite durch 5, der dritte durch 4 dividirt, die Quotienten die Summe 560 geben (Sind hier eigentlich drei unbekannte Grössen?).

3) Die Zahl 100 in vier Theile zu theilen, daß, wenn der erste durch 9, der zweite durch 7, der dritte durch 3 vervielfacht wird, die Summe der Producte 702 ist.

4) Es kauft Jemand dreierlei Waaren für 2100 fl., und bezahlt 70 fl. für ein Pfund der ersten, 80 fl. für ein Pfund der zweiten, und 90 fl. für ein Pfund der dritten. Wieviel hatte er von allen Sorten, und auf wievielerlei

Art kann er in ganzen positiven Zahlen seine Zahlung machen?

§. 188.

Aus den mannichfaltigen Formen der unbestimmten Gleichungen des zweiten Grades, wollen wir nur jene zum Gegenstande unserer Untersuchung machen, in welchen die Quadrate der unbekannten Größen nicht vorkommen, und zu diesem Ende folgende Aufgaben auflösen.

1. *Die Seiten eines Rechtecks, dessen Inhalt durch eine Zahl ausgedrückt wird, welche dem vierfachen Umfange der Figur gleich ist, sollen in ganzen positiven Zahlen angegeben werden.*

Aufl. Sind x und y die Grundlinie und Höhe der Figur, so ist xy ihr Inhalt, und $2x + 2y$ der Umfang der Figur, mithin

$$xy = 8x + 8y,$$

woraus erhalten wird

$$x = \frac{8y}{y - 8} = 8 + \frac{64}{y - 8};$$

die Zahl x wird so oft einen ganzen Werth bekommen, als $y - 8$ in 64 enthalten ist; hieraus folgt, daß 64 in seine Faktoren aufgelöst werden, und $y - 8$ nach und nach einem jeden dieser Faktoren gleich gesetzt werden muß; man hat:

$$y - 8 = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64,$$

und daher

$$y = 9, 10, 12, 16, 24, 40, 72,$$

und für diese Werthe von y wird

$$x = 72, 40, 24, 16, 12, 10, 9;$$

da nun in beiden Reihen dieser Werthe die nämlichen vorkommen, so giebt es eigentlich nur vier verschiedene Auflösungen, nämlich $y = 9, 10, 12, 16$, und $x = 72, 40, 24, 16$.

2. *Man kennt die Seite a eines Quadrats; man soll ein Rechteck suchen, dessen Umfang sich zum Umfange des Quadrats verhält, wie die Flächenräume beider Figuren.*

Aufl. Es seien x und y die Seiten des Rechtecks, mithin $2(x + y)$ sein Umfang, und xy sein Inhalt; man hat daher

$xy : a^2 = 2(x + y) : 4a = x + y : 2a$,
mithin

$$2xy = a(x + y);$$

ist nun $a = 2a'$, d. i. eine gerade Zahl, so hat man

$$xy = a'(x + y),$$

mithin

$$x = \frac{a'y}{y - a'} = a' + \frac{a'^2}{y - a'},$$

und die Auflösung beruht auf der vorigen Aufgabe. Ist aber a eine ungrade Zahl, so hat man

$$x = \frac{ay}{2y - a} = \frac{a}{2} + \frac{a^2}{2(2y - a)},$$

und für diesen Fall giebt es ganze Werthe von x , wenn $2y - a$ ein Theiler von a^2 ist. Man nehme $a = 20$, und nachher $a = 15$; so ist nach der ersten Auflösung

$$x = 10 + \frac{100}{y - 10};$$

mithin muß sein

$$y - 10 = 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100,$$

also

$$y = 11, 12, 14, 15, 20, 30, 35, 60, 110,$$

und

$$\frac{100}{y - 10} = 100, 50, 25, 20, 5, 4, 2, 1,$$

folglich die Werthe

$$x = 110, 60, 35, 30, 20, 15, 14, 12, 11;$$

nur fünf von diesen Werthen geben verschiedene Auflösungen.

Nimmt man $a = 15$, so ist

$$x = \frac{15}{2} + \frac{225}{2(2y - 15)};$$

hieraus geht hervor, daß $2y - 15$ ein Faktor der Zahl 225 sein muß; man hat

$$2y - 15 = 1, 3, 5, 9, 15, 25, 45, 75, 225,$$

folglich

$$y = 8, 9, 10, 12, 15, 20, 30, 45, 120;$$

$$\frac{225}{2y - 15} = 225, 75, 45, 25, 15, 9, 5, 3, 1;$$

die Werthe für x sind also

$$x = 120, 45, 30, 20, 15, 12, 10, 9, 8;$$

auch hier finden nur 5 verschiedene Auflösungen Statt.

3. Es sei a die Kante eines Kubus; wie groß werden die drei Kanten des körperlichen Winkels eines rechtwinklichten Parallelepipedums sein, dessen Grundfläche ein Quadrat ist; und überdies sollen die Oberflächen beider Körper mit ihren Volumen in Proportion sein.

Aufl. Es seien x und y die Kanten eines körperlichen Winkels (x ist die Seite der quadratischen Grundfläche); durch diese Bezeichnung hat man

$$\frac{x^2 y}{2x^2 + 4xy} = \frac{a^3}{6a^2},$$

$$3xy = ax + 2ay,$$

und hieraus wiederum

$$x = \frac{2ay}{3y - a} = \frac{2a}{3} + \frac{2a^2}{3(3y - a)}.$$

Man setze $a = 8$, alsdann ist

$$3x = 16 + \frac{128}{3y - 8};$$

$$3y - 8 = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128;$$

folglich

$$y = 3, \text{ »}, 4, \text{ »}, 8, \text{ »}, 24, 2;$$

$$\frac{128}{3y - 8} = 128, \text{ »}, 32, \text{ »}, 8, \text{ »}, 2;$$

$$3x = 16 + 128, 16 + 32, 16 + 8, 16 + 2$$

$$= 48, 16, 8, 6.$$

4. Welche Werthe findet man für x und y in den Gleichungen

$$a) \quad xy = 2x + 2y + 20,$$

$$b) \quad 8xy = 6x + 5y + 12,$$

$$c) \quad 4xy = 3x + 2y - 12.$$

5. Wieviel Parallelepipeda mit quadratischen Grundflächen giebt es, deren körperliche Räume zu ihren Oberflächen sich verhalten, wie 5 : 1?

Aufl. Kanten der Grundfläche $x = 220, 120, 70, 60, 45, 30, 28, 25, 24, 22, 21.$

Höhen $y = 11, 12, 14, 15, 18, 20, 30, 35, 50, 60, 110, 210.$

Fünfzehntes Kapitel.

Gleichungen des dritten und vierten Grades.

§. 189.

Wenn die Faktoren $x - a$, $x - b$, $x - c$ durch einander vervielfacht werden, so ist ihr Produkt:

$x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc = 0$,
welches durch die allgemeine Formel

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0 \dots (1)$$

dargestellt wird, in welcher Gleichung a , b , c die *Wurzeln* sind, so daß, wenn a oder b oder c für x in die Gleichung (1) gesetzt wird, die Summe aller Glieder Null ist.

Hat man nun eine vollständige kubische Gleichung

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0,$$

so läßt sich immer ein Versuch anstellen, ob die Faktoren des unabhängigen Gliedes für x substituirt, die Gleichung gleich Null machen. Hat man einmal nur einen solchen Werth gefunden, so setze man ihn mit verändertem Zeichen zu x , und dividire durch diesen zweitheiligen Faktor die gegebene Gleichung; der Quotient ist eine Gleichung des zweiten Grades, welche, nach den bekannten Regeln aufgelöst, die beiden übrigen Wurzeln liefert.

In dem vorliegenden Falle sind 1, 2, 3 die Faktoren des unabhängigen Gliedes 6; jeder von ihnen, für x substituirt, giebt Null; mithin $x = 1$, $= 2$, $= 3$; kennt man $x = 1$, so braucht man nur durch $x - 1$ die gegebene Gleichung zu dividiren, und man erhält $x^2 - 5x + 6 = 0$ zum Quotienten; diese Gleichung giebt $x = \frac{5}{2} \pm 1$, also $= 2$, $= 3$.

Welches sind die Wurzeln der Gleichung

$$x^3 + x^2 - 34x + 56 = 0?$$

§. 190.

Es kann sich aber ereignen, daß das höchste Glied einer Gleichung noch mit einem Coëfficienten behaftet ist, wie z. B. in der Gleichung

$$4x^3 - 12x^2 + 11x - 3 = 0;$$

man dividire in einem solchen Falle die ganze Gleichung durch den Coëfficienten 4, und man erhält:

$$x^3 - 3x^2 + \frac{11}{4}x - \frac{3}{4} = 0;$$

man setze nun $x = \frac{1}{2}y$, wodurch man zu einer Gleichung vom nämlichen Grade gelangt, deren Wurzeln aber doppelt so groß sind, als die der gegebenen; die umgeformte Gleichung ist

$$\frac{y^3}{8} - \frac{3y^2}{4} + \frac{11y}{8} - \frac{3}{4} = 0;$$

bringt man die Brüche unter gleiche Benennung, und hebt den gemeinschaftlichen Nenner 8 auf, so ist

$$y^3 - 6y^2 + 11y - 6 = 0,$$

deren Wurzeln $y = 1, = 2, = 3$ sind; folglich

$$x = \frac{1}{2}, = 1, = \frac{3}{2}.$$

Die allgemeine Regel läßt sich in folgenden Worten aussprechen: *Man schreibe y statt x in die gegebene Gleichung, und unter diese neue Gleichung die Glieder einer geometrischen Progression, deren erstes Glied 1, der Exponent dem Coëfficienten des höchsten Gliedes gleich; nach geschehener Multiplikation der Glieder der Gleichung durch die unten stehenden Glieder der Reihe, dividirt man durch diesen Exponenten, der nun gemeinschaftlicher Faktor geworden ist.*

Für die gegebene Gleichung hat man:

$$\begin{array}{ccccccc} 4y^3 & - & 12y^2 & + & 11y & - & 3 = 0 \\ 1 & & 4 & & 16 & & 64 \end{array}$$

folglich

$$y^3 - 12y^2 + 44y - 48 = 0;$$

die Wurzeln dieser Gleichung sind das Vierfache der Wurzeln der gegebenen Gleichung.

Um jedoch zwischen beiden Methoden eine gewisse Gleichförmigkeit herzustellen, bemerken wir, daß die drei letzten Glieder der so eben erhaltenen Gleichung

chung einen gemeinschaftlichen Faktor 4 haben; setzt man nun $y = 2z$, d. h. einem Vielfachen von z , dessen Potenzen nach und nach die Glieder der obigen Gleichung dividiren; so hat man

$$8z^3 - 12 \cdot 4z^2 + 44 \cdot 2z - 48 = 0;$$

dividirt man nun durch den Coëfficienten 8, so ist

$$z^3 - 6z^2 + 11z - 6 = 0.$$

§. 191.

Ist nun das unabhängige Glied einer kubischen Gleichung nicht leicht in Faktoren zerlegbar, so muß die gegebene Gleichung in eine andere umgeformt werden, in welcher das zweite Glied Ax^2 fehlt. Wir haben schon oben bei Auflösung der unvollständigen quadratischen Gleichungen (§. 128.) gesehen, wie das durch x vervielfachte Glied durch Umformung verschwindet. Im vorliegenden Falle schreibe man für x eine andere unbekannte Gröfse y , zu welcher der dritte Theil des Coëfficienten des Gliedes x^2 mit entgegengesetzten Zeichen addirt werden muß; man erhält eine Gleichung in y , deren Wurzeln zu den Werthen der Wurzeln der gegebenen Gleichung führen.

Die gegebene Gleichung sei

$$x^3 + bx^2 + 20x + 15 = 0;$$

man mache $x = y - 2$, und man erhält:

$$\begin{array}{rcl} x^3 & = & y^3 - 6y^2 + 12y - 8 \\ 6x^2 & = & + 6y^2 - 24y + 24 \\ 20x & = & + 20y - 40 \\ 15 & = & + 15 \end{array}$$

$$x^3 + 6x^2 + 20x + 15 = y^3 + 8y - 9 = 0.$$

Eine Wurzel der neuen Gleichung ist $y = 1$; folglich der gegebenen $x = y - 2 = 1 - 2 = -1$; wird nun diese durch $x + 1$ dividirt, so ist $x^2 + 5x + 15 = 0$ der Quotient, dessen beide Wurzeln imaginär sind.

§. 192.

Es sei

$$x^3 + nx + p = 0 \dots (2)$$

die reducirte Gleichung, worin $x = y + z$ gesetzt werde; durch diesen Werth geht sie in folgende über:

$y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 + n(y + z) + p = 0$,
oder vielmehr in folgende:

$y^3 + z^3 + p + (y + z)(3yz + n) = 0$;
diese Gleichung kann nicht anders Null werden, als
dadurch, daß man den unbestimmten Gröſsen solche
Werthe beilegt, wodurch das Produkt $(y + z)(3yz +$
 $+ n)$ verschwindet; man setze daher

$$(y + z)(3yz + n) = 0, \dots (\alpha)$$

der übrige Theil muß also auch Null seyn, nämlich

$$y^3 + z^3 + p = 0 \dots (\beta).$$

Da $(y + z)$ nicht gleich Null sein kann, so muß
man in der Gleichung (α) haben:

$$3yz + n = 0;$$

hieraus ergibt sich:

$$z = -\frac{n}{3y} \dots (\gamma);$$

führt man diesen Werth von z in (β) ein, so gelangt
man zu folgender Gleichung:

$$y^3 - \frac{n^3}{27y^3} + p = 0,$$

und wenn durch y^3 vervielfacht wird:

$$y^6 + py^3 - \frac{n^3}{27} = 0,$$

welche Gleichung nun nach §. 130 aufgelöst werden
muß; ihre Wurzeln, für y in (γ) eingeführt, geben
 z , und hiedurch wird auch x bekannt. Man mache
 $y^3 = t$, wodurch man hat:

$$t^2 + pt = \left(\frac{1}{3}n\right)^3 \dots (3).$$

Bildet man dieselbe Gleichung vom sechsten Grade
auch für z , so erhält man, indem $z^3 = t'$ ist,

$$t'^2 + pt' = \left(\frac{1}{3}n\right)^3 \dots (4);$$

wegen der Gleichförmigkeit der Gleichungen (3) und
(4) muß t' die zweite Wurzel der Gleichung (3) sein;

man hat daher: $x = \sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{t'}$.

Die allgemeine Regel zur Auflösung der kubischen
unvollständigen Gleichungen ist folgende: Man ver-
wandle die gegebene Gleichung in eine andere, in welcher
das Glied x^2 fehlt; löse hierauf die Gleichung (3) auf,
wodurch man y^3 und z^3 erhält; sind die Wurzeln t und

t' reell, so dividire man die Gleichung durch $x \pm$ der reellen Wurzel, und löse alsdann die quadratische Gleichung auf, um die beiden andern Wurzeln zu erhalten.

§. 193.

Es sei $x^3 - 6x + 9 = 0$ die gegebene Gleichung; hier sind $n = -6$; $p = 9$, mithin

$$t^2 + 9t = -8,$$

und hieraus $t = -\frac{9}{2} \pm \frac{7}{2}$, folglich $t = -1$, $t' = -8$, und deswegen

$$x = \sqrt[3]{-1} + \sqrt[3]{-8} = -3;$$

wird nun die gegebene Gleichung durch $x + 3$ dividirt, so ist $x^2 - 3x + 3$ der Quotient, dessen Wurzeln $x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-3}$ sind.

Die gegebene Gleichung

$$x^3 + 6x - 7 = 0$$

gibt $n = 6$, $p = -7$; also die Gleichung (3)

$$t^2 - 7t = 8,$$

welche aufgelöst zu den Wurzeln $t = 8$ und $t' = -1$

führt, folglich $x = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{-1} = 2 - 1 = 1$.

Aus der Gleichung

$$x^3 - 3x^2 + 12x - 4 = 0$$

schaffe man das Glied $3x^2$ durch $x = y + 1$ weg, und die aufzulösende Gleichung ist

$$y^3 + 9y + 6 = 0,$$

wo $n = 9$, $p = 6$, mithin die reducirte Gleichung

$$t^2 + 6t = 27,$$

welche $t = 3$, $t' = -9$ giebt; folglich

$$y = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9} = -0,637835, \text{ mithin}$$

$$x = 0,362165.$$

Man suche die Wurzeln der Gleichungen $x^3 - 3x = 18$, und $x^3 - 27x + 54 = 0$.

§. 194.

Es kann sich aber ereignen, daß die Wurzeln t und t' Irrationalzahlen sind, aus welchen dann noch die Kubikwurzeln gezogen werden müssen, wie z. B.

$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$; für diesen Fall setze man

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = (x + \sqrt[3]{y}) \sqrt[3]{z},$$

wo z eine beliebige Gröfse ist, die nur, um die Rechnung zu erleichtern, eingeführt wird; man erhebe auf beiden Seiten zur dritten Potenz, und setze die rationalen, wie auch die irrationalen Glieder unter sich gleich; es ist daher

$a = z(x^3 + 3xy)$, $\sqrt[3]{b} = z\sqrt[3]{y(3x^2 + y\sqrt[3]{y})}$; diese Werthe zum Quadrat erhoben, und hierauf subtrahirt, geben:

$$\frac{a^2 - b}{z^2} = [(x^3 + 3xy)^2 - (3x^2\sqrt[3]{y} + y\sqrt[3]{y})^2]$$

$$= (x^3 + 3xy + 3x^2\sqrt[3]{y} + y\sqrt[3]{y})(x^3 + 3xy - 3x^2\sqrt[3]{y} - y\sqrt[3]{y}) = (x + \sqrt[3]{y})^3(x - \sqrt[3]{y})^3 = (x^2 - y)^3;$$

da nun, der Annahme gemäß, x und y rationale Zahlen sind, so muß es auch der Ausdruck $\frac{a^2 - b}{z^2}$

sein; für z setze man nun solche Werthe, daß der Quotient ein vollkommener Kubus wird; ist $a^2 - b$ schon eine Kubikzahl, so mache man $z = 1$. Ist dieser Werth bestimmt, so ist

$$k = \sqrt[3]{\frac{a^2 - b}{z^2}} = x^2 - y,$$

also $y = x^2 - k$, und die Gleichung

$$a = zx(x^2 + 3xy)$$

verwandelt sich in

$$4zx^3 - 3kxz = a,$$

in welche man für z seinen Werth einführe, und hierauf nur die rationale Wurzel der Gleichung bestimme.

Es sei $\sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{108}$ zu bestimmen; hier ist $a = 10$, $b = 108$; mithin $\frac{10^2 - 108}{z^2} = \frac{-8}{z^2}$; da 8 der Kubus von 2 ist, mache man $z = 1$, wodurch $k = -2 = x^2 - y$, und die aufzulösende Gleichung:

$$4x^3 + 6x = 10,$$

wo $x = 1$ gefunden wird; es ist daher $y = 1 + 2 = 3$; folglich $\sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{108} = 1 + \sqrt[3]{3}$.

Man suche ferner $\sqrt[5]{8} + 4\sqrt[5]{5}$; hier ist $a = 8$, $b = 80$, $a^2 - b = 64 - 80 = -16$; wird $z = 4$

genommen, so ist $\frac{a^2 - b}{z^2} = -1 = k$, mithin die aufzulösende Gleichung $4x^3 + 3x = 2$, wo $x = \frac{1}{2}$, mithin $y = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$, also $\sqrt[3]{8 + 4\sqrt{5}} = (\frac{1}{2} + \sqrt[3]{\frac{5}{4}})$
 $\sqrt[3]{4} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{4} (1 + \sqrt[3]{5})$.

§. 195.

Wird die Gleichung $t^2 + pt = \frac{n^3}{27}$ wirklich aufgelöst, so hat man, wegen $y = t$, und $z = t'$, folgenden Werth von x , nämlich:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{n^3}{27} + \frac{1}{4}p^2}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{n^3}{27} + \frac{1}{4}p^2}},$$

welchen Werth man die *Cardanische Formel* nennt. (Die Geschichte dieser Formel findet sich in: *Histoire des Mathematiques par Montucla*.) Durch diese Formel erhält man immer einen reellen Werth, so lange n positiv, oder wenn n negativ und $\frac{1}{27}n^3 < \frac{1}{4}p^2$ ist. Man hat für den Fall $-\frac{1}{27}n^3 > \frac{1}{4}p^2$ die Gleichung für unauflösbar gehalten; oder man nannte die Gleichung *irreductibel*; man wollte dadurch anzeigen, daß für x keine mögliche Wurzel zu finden sei. Daß an diesem nicht so ist, wollen wir nun beweisen. Wir setzen daher die Gröfse $\frac{1}{27}n^3 + \frac{1}{4}p^2 = b \sqrt{-1}$, und $-\frac{1}{2}p = a$; alsdann hat man $\sqrt[3]{a + b \sqrt{-1}}$, und $\sqrt[3]{a - b \sqrt{-1}}$; nach der Formel (8) im §. 171 ist:

$$\sqrt[3]{a + b \sqrt{-1}} = a^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}a^{\frac{1}{3}-1} b \sqrt{-1} + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{1 \cdot 2} a^{\frac{1}{3}-2} (b \sqrt{-1})^2 + \dots$$

$$\sqrt[3]{a - b \sqrt{-1}} = a^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}a^{\frac{1}{3}-1} b \sqrt{-1} + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{1 \cdot 2} a^{\frac{1}{3}-2} (b \sqrt{-1})^2 - \dots$$

bemerkt man nun, daß $(\sqrt{-1})^2 = -1$; $(\sqrt{-1})^3 = -\sqrt{-1}$; $(\sqrt{-1})^4 = +1$; $(\sqrt{-1})^5 = +\sqrt{-1}$; $(\sqrt{-1})^6 = -1$; u. s. w.: so begreift man leicht,

dafs die Glieder, welche durch grade Potenzen von $b \sqrt[n]{-1}$ vervielfacht werden, keine imaginären Gröfsen enthalten, diese mithin nur in den Gliedern der ungraden Potenzen von $b \sqrt[n]{-1}$ erscheinen können; da nun die Zeichen solcher Glieder in der obern Reihe gerade den Zeichen der nämlichen Glieder in der untern Reihe entgegengesetzt sind, so hat man nach geschehener Addition die Summe $2P$, folglich

$$\sqrt[n]{a + b \sqrt[n]{-1}} + \sqrt[n]{a + b \sqrt[n]{-1}} = 2P = x.$$

§. 196.

Hat man in einer vollständigen Gleichung vom vierten Grade das unabhängige Glied in seine Faktoren zerlegt, und wenigstens einen als Wurzel dieser Gleichung gefunden, so bringe man durch Division die Gleichung auf eine vom dritten Grade, welche dann nach den obigen Regeln behandelt wird. Fehlt aber das Glied x^3 , und da wir wissen, dafs jede Gleichung in eine andere umgeformt werden kann, in welcher das zweite Glied fehlt, so dafs also die Gleichung die reducirte Form hat:

$$y^4 + qy^2 + ry + s = 0 \dots (1),$$

so schreibe man die Faktoren

$$y^2 + ey + f = 0, \text{ und } y^2 - ey + g = 0 \dots (2);$$

denn werden diese beiden Faktoren durch einander vervielfacht, so ergibt sich:

$$\begin{array}{r} y^4 + ey^3 + fy^2 \\ - ey^3 - e^2y^2 = efy \\ + gy^2 + egy + gf \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} y^4 + f & y^2 + eg \\ - e^2 & - ef \\ + g & \end{array} \quad y + gf = 0;$$

wird hievon die Gleichung (1) subtrahirt, so hat man noch übrig:

$$(f - e^2 + g - q)y^2 + (eg - ef - r)y + gf - s = 0,$$

was nur dann Statt finden kann, wenn die Coëfficienten der Gröfsen y^2 , y einzeln gleich Null sind; hiedurch ergeben sich folgende drei Gleichungen:

$$gf - s = 0 \dots (\alpha)$$

$$eg - ef - r = 0 \dots (\beta)$$

$$f - e^2 + g - q = 0 \dots (\gamma);$$

hieraus: $s = fg$; $r = eg - ef$; $q = f - e^2 + g$;

$g - f = \frac{r}{e}$, und $g + f = e^2 + q$; werden die

letztern Gleichungen addirt und hierauf subtrahirt,

$$\left. \begin{aligned} g &= \frac{q + e^2 + \frac{r}{e}}{2} \\ f &= \frac{q + e^2 - \frac{r}{e}}{2} \end{aligned} \right\} \dots (\delta);$$

werden diese Werthe multiplicirt, so hat man

$$fg = \frac{q^2 + 2qe^2 + e^4 - \frac{r^2}{e^2}}{4} = s,$$

die reducirte Gleichung ist also

$$e^6 + 2qe^4 + (q^2 - 4s)e^2 - r^2 = 0,$$

und da sie nur gerade Potenzen von e enthält, mache man $e^2 = z$, wodurch man erhält:

$$z^3 + 2qz^2 + (q^2 - 4s)z - r^2 = 0 \dots (3),$$

welche nach den Regeln für die kubischen Gleichungen aufgelöst werden muß.

§. 197.

Hieraus leiten wir folgende Regeln ab:

1) Die gegebene Gleichung verwandle man in eine andere, in welcher das zweite Glied fehlt, wenn dieß nicht schon der Fall ist.

2) Diese neue Gleichung werde mit (3) verglichen, und wenigstens eine Wurzel für z bestimmt, wodurch auch $e = \sqrt{z}$ bekannt wird.

3) Mit Hilfe des Werthes von e bestimme man in den Gleichungen (δ) die Werthe g und f , oder wenigstens für eine von beiden Grössen, weil die andere vermittelst (α) bestimmt werden kann.

4) Werden nun für e , f , g die so eben gefundenen Werthe in die Gleichungen (2) eingeführt, so lassen sich

die Wurzeln für (1) finden, welche auch zu den Werthen der Wurzeln der gegebenen Gleichung führen.

§. 198.

Es sei die Gleichung

$$x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0,$$

wo $x = y$, $q = -25$, $r = 60$, $s = -36$, durch welche Werthe die Gleichung (3) giebt

$$z^3 - 50z^2 + 769z - 3600 = 0;$$

man schreibe $v + \frac{50}{3} = z$, wodurch

$$v^3 - \frac{193}{3}v - \frac{1150}{27} = 0,$$

wo $v = 8\frac{1}{3}$, folglich $z = 8\frac{1}{3} + \frac{50}{3} = 25$,

also $e = \sqrt{25} = 5$, dieser Werth führt zu

$$g = \frac{-25 + 25 + \frac{60}{5}}{2} = +6,$$

$$f = \frac{-25 + 25 + \frac{60}{5}}{2} = -6;$$

also $y^2 + 5y - 6 = 0$, und $y^2 - 5y + 6 = 0$; aus der ersten Gleichung finden sich

$$y = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{6 + \frac{25}{4}} = -\frac{5}{2} \pm \frac{7}{2} = +1, = -6,$$

aus der zweiten

$$y = +\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = \pm \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} = 3, = 2,$$

die Wurzeln der gegebenen Gleichungen sind also

1, 2, 3 - 6, und $x - 1$, $x - 2$, $x - 3$, $x + 6$ die Faktoren.

§. 199.

Dieses Verfahren läßt sich abkürzen; es sei nämlich $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ die vom zweiten Gliede befreite Gleichung, in welche man $x = y + z$ setze; durch diesen Werth hat man

$$y^4 + (6z^2 + p)y^2 + (z^4 + pz^2 + 9z + 1) + 4zy^3 + (4z^3 + 2pz + q)y = 0;$$

da nun die Beziehung zwischen z und y nach Willkühr bestimmt werden kann, so setze man

$$4zy^3 + (4z^3 + 2pz + q)y = 0,$$

woraus

$$y^2 = -z^2 - \frac{p}{2} - \frac{q}{4z} \dots \dots (1);$$

wird mittelst dieses Werthes y^2 aus obiger Gleichung eliminirt, so erhält man

$z^6 + \frac{1}{2}pz^4 + \frac{1}{16}(p^2 - 4r)z^2 - \frac{1}{64}q^2 = 0$;
um dieser Gleichung eine einfachere Form zu geben, setze man $z^2 = \frac{1}{4}t$, wodurch wird

$t^3 + 2pt^2 + (p^2 - 4r)t - q^2 = 0 \dots (2)$;
diese Gleichung löse man nach den oben gegebenen Regeln auf, so hat man $z = \pm \frac{1}{2}\sqrt{t}$, mithin, weil in (1) der Werth y bestimmt wird

$$x = y \pm \frac{1}{2}\sqrt{t}, y^2 = -\frac{t}{4} - \frac{p}{2} - \frac{q}{2\sqrt{t}} \dots (3),$$

und letztlich

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{t}}{2} \pm \sqrt{-\frac{1}{4}t - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2\sqrt{t}}} \\ x &= -\frac{1}{2}\sqrt{t} \pm \sqrt{-\frac{1}{4}t - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2\sqrt{t}}} \end{aligned} \right\} \dots (4).$$

Es sei $2x^4 - 19z^2 + 24x = \frac{23}{8}$ die gegebene Gleichung, wo also $p = -\frac{19}{2}$, $q = 12$, $r = \frac{23}{16}$; die reducirte Gleichung (2) wird also

$t^3 - 19t^2 + 96t = 144$; man findet $t = 3$ für eine der Wurzeln; es ist also

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{3} \pm \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}, \text{ und } = -\frac{1}{2}\sqrt{3} \pm \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}.$$

§. 200.

Um die Ausdrücke, wie $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$, von dem ersten Wurzelzeichen zu befreien, setze man

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = (x + \sqrt{y});$$

wird zum Quadrate erhoben, und rationale wie auch irrationale Glieder einander gleichgesetzt, so ist

$$a = x^2 + y, \text{ und } \sqrt{b} = 2x\sqrt{y};$$

wird aufs neue zum Quadrate erhoben, und subtrahirt, so hat man

$$\begin{aligned} a^2 - b &= (x^2 + y)^2 - 4x^2y = \\ &= (x^2 + y + 2x\sqrt{y})(x^2 + y - 2x\sqrt{y}) \\ &= (x + \sqrt{y})^2 (x - \sqrt{y})^2 = (x^2 - y)^2; \end{aligned}$$

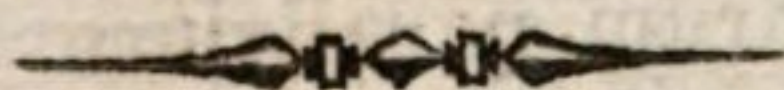
damit nun dergleichen Fälle auflösbar sind, muß $x^2 - y$ die Quadratwurzel von $a^2 - b$ sein; man setze diese r , also $x^2 - y = r$; wird hiezu $a = x^2 + y$ addirt,

von dieser Gleichung die andere $x^2 - y = r$ subtrahirt
so muß sein

$$x^2 = \frac{a + r}{2}, y = \frac{a - r}{2}.$$

Für unsern obigen Fall ist $a = 4$, $b = 12$, mithin
 $\sqrt{a^2 - b} = \sqrt{16 - 12} = 2 = r$, folglich $x =$
 $= \sqrt{\frac{4 + 2}{2}} = \sqrt{3}$, und $y = 1$; die Wurzeln der
gegebenen Gleichung also:

$$x = 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}, = -1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$



In der Verlagshandlung sind ausserdem noch folgende Werke erschienen:

- Beiträge zur Beförderung geometrischer und geographischer Messungen für diejenigen, welche dergleichen Geschäfte zu leiten haben, für Landmesser und Künstler in mathematischen Instrumenten.** Mit 2 Kpfrt. gr. 8. 1804. 12 ggr. od. 48 kr.
- Bleibtreu, L., Lehrbuch der niederen und höheren Arithmetik, mit vollständ. Anleitung zur einfachen und zusammengesetzten Wechselrechnung, sowie zur Berechnung der bei den Annuitäten der Leibrenten und andern Staatseffekten und bei allen merkantilischen und statistischen Angelegenheiten vorkommenden Fälle.** gr. 8. 1826. 1 Thlr. od. 1 fl. 48 kr.
- Bossüt, Lehrbegriff der Hydrodynamik.** A. d. Franz. Mit Anmerk. und Zusätzen von K. Chr. Langsdorf. 2 Bde. Mit 23 Kupfern. gr. 8. 1791. 92. 5 Thlr. od. 7 fl. 30 kr.
- Bouharlat, Anfangsgründe der Differenzial- und Integral-Rechnung.** A. d. Franz. übers. von F. J. Göbel. Mit 6 Kpfrt. gr. 8. 1823. 2 Thlr. 6 ggr. od. 4 fl.
- Göbel, F. J., Grundlehren der Geometrie, Trigonometrie und der darstellenden Geometrie.** Mit 10 Kpfrtafeln, gr. 8. 2 Thlr. 12 ggr. od. 4 fl. 30 kr.
- Hauff, C. nova rectorum parallelarum theoria.** Editio secunda suppl. aucta. 4. 1822. 16 ggr. od. 1 fl. 12 kr.
- Hofmann, J. J. J., vermischte Aufsätze aus der Physik, Philosophie und Mathematik.** 8. 1826. 1 Thlr. 6 ggr. od. 2 fl. 15 kr.
- —, **Robervels Wage, historisch erläutert und nach ihren paradox scheinenden Wirkungen streng bewiesen.** Mit Kpfrn. 4. 1816. 8 ggr. od. 36 kr.
- Prony, neue Architectura Hydraulika oder die Statik, Dynamik, Hydrostatik, die Lehre von den Maschinen und die Beschreibung der Dampfmaschinen.** 3 Thle. gr. 4. 1794 — 1800. 14 Thlr. 16 ggr. od. 22 fl.
- Rambach, J. Th. F., Anleitung zur mathemat. Erdbeschreibung.** 4te verb. Aufl. von J. Brand. Mit 9 Kpfrt. gr. 8. 1825. 16 ggr. od. 1 fl. 12 kr.
- Schirmer, J. M., selbstlehrende Algebra.** 5 Abtheilungen, gr. 8. 1778 — 82. 1 Thlr. 22 ggr. od. 2 fl. 51 kr.
- Scopp, J. G., Schauplatz des mechanischen Mühlenbaues.** 6 Bdchen 4. 1766 — 69. 3 Thlr. 18 ggr. od. 5 fl. 40 kr.
- Stein, K. Ph. G., Grundlehren der prakt. und reinen Geometrie f. d. ersten Unterricht.** 2te Aufl., verb. v. J. J. J. Hoffmann. Mit 8 Kpfrn. 8. 1820. 10 ggr. od. 45 kr.
- Stricker, J. H., Anweisung zu den Anfangsgründen der Rechenkunst.** gr. 8. 1797. 12 ggr. od. 48 kr.
- —, **Abhandlung von den Dezimalbrüchen und deren Anwendung auf mancherlei Arten der Berechnung.** gr. 8. 1799. 10 ggr. od. 45 kr.
- Tabor, vollständ. Handbuch der Gasbeleuchtungskunst, nach den neuesten Erfahrungen bearbeitet.** 2 Bde. Mit Kpfrn. gr. 8. 1823. 6 Thlr. od. 10 fl. 48 kr.
- Ueber das sogenannte Perpetuum mobile, besonders üb. die Geisersche Penduluhr.** Mit 1 Kpfr. 8. 1818. 8 ggr. od. 36 kr.



Goebel, Franz J.,

Grundsätze der allgemeinen Grössenlehre

Frankfurt am Main 1827

BHS II K 11

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10708098-9